Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Geben Sie Kellerautomaten und kontextfreie Grammatiken an, die die folgenden Sprachen akzeptieren.

(a) $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

(b) $\{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

(c) $\{a^m b^n \mid m, n \geq 0,\ m \neq n\}$

Aufgabe 2. Eine kontextfreie Grammatik, die die Sprache

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^r\}$$

erzeugt, ist $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$P = \{S \to \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb\}.$$

Wandeln Sie die Grammatik mit dem Verfahren der Vorlesung (Folie 279) in einen PDA um. Überprüfen Sie, ob ihr Automat richtig arbeitet, indem Sie ihn auf den Eingaben

- $w_1 = abbabba$ und
- $w_2 = abb$

laufen lassen.

Aufgabe 3. Nutzen Sie Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen, um zu zeigen oder zu widerlegen, dass folgende Sprachen kontextfrei sind:

(a) $L_1 = \{a^{n_1} b^{n_1} a^{n_2} b^{n_2} \cdots a^{n_k} b^{n_k} \mid n_1, n_2, \ldots, n_k, k \geq 0\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$

(c) $L_3 = \{a^n b^n c^m d^n \mid n, m \geq 0\}$

(d) $L_4 = \{x^n y^n \mid x, y \in \Sigma, n \geq 0\}$, Σ beliebig

Hinweis: Sie dürfen das Wissen über die Sprachen von Blatt 10-11 benutzen, von denn Sie wissen, dass sie nicht kontextfrei sind.

(e) Finden Sie den Fehler in folgendem „Beweis“: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $L_n = \{a^n b^n c^n\}$ kontextfrei (sogar regulär), da L_n eine einelementige Menge ist. Außerdem sind kontextfreie Sprachen unter Vereinigung abgeschlossen. Folglich ist induktiv $K_n = \bigcup_{k=0}^{n} L_k$ kontextfrei. Es folgt, dass auch der Grenzwert $K = \bigcup_{k=0}^{\infty} L_k = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ kontextfrei ist.