Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Ist das folgende Problem entscheidbar?
Gegeben: Nichtdeterministische Kellerautomaten M_1 und M_2 mit beschränktem Keller (d.h. für jede Konfiguration (z, x, γ) ist $|\gamma| \leq K$ für ein festes K).
Frage: Gilt $L(M_1) \subseteq L(M_2)$?

Lösung zu Aufgabe 1. Im Allgemeinen ist das Inklusionsproblem für kontextfreie Sprachen unentscheidbar! Jedoch werden wir zeigen, dass dieses Problem entscheidbar ist.

Wir haben bereits ein Verfahren kennengelernt, welches das Inklusionsproblem löst, allerdings mit der Einschränkung, dass es sich um reguläre Sprachen handelt. Um das Verfahren anzuwenden, ist es notwendig, dass $L(M_1)$ und $L(M_2)$ regulär sind. Dies bedeutet, wir überprüfen zunächst, ob M_i sich in NFAs M_i' umwandeln lassen. In der Tat: Sei $M_1 = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$. Da die Anzahl der Zustände, sowie nach Voraussetzung auch die Anzahl aller möglichen Kellerinhalte endlich ist (das Kelleralphabet Γ ist ebenfalls endlich) können wir jedes Paar (z, γ) ($z \in Z$, $\gamma \in \Gamma^{\leq K}$) mit einem Zustand $q_{z,\gamma}$ eines NFAs kodieren.

Wir erhalten einen NFA $M_1' = (Q, \Sigma, \Delta, \{q_{z_0,\#}\}, F)$, wobei Q und F gegeben sind durch $Q = \{q_{z,\gamma} \mid z \in Z, \gamma \in \Gamma^{\leq K}\}$ und $F = \{q_{z,\varepsilon} \mid z \in Z\}$. Sei $(z, a, A) \to (z', \gamma)$ ein Übergang in δ. Dann enthält Δ die Übergänge $(q_{z,A\beta}\,, a) \to q_{z',\gamma\beta}$, wobei $|A\beta|, |\gamma\beta| \leq K$ (und β ist auch aus $\Gamma^{\leq K}$). Mit M_2 verfahren wir genauso.

Durch die ε-Übergänge im PDA können ε-Kanten in den NFAs entstehen, daher müssen wir die resultierenden NFAs zunächst ε-frei machen. Dies geht aber (siehe Folie 75) und wir erhalten ε-freie NFAs M_i''. Da wir NFAs M_i'' gefunden haben mit $L(M_i) = L(M_i'')$, ist unser Problem entscheidbar, wenn das Inklusionsproblem für reguläre Sprachen entscheidbar ist. Dies können wir dank der Vorlesung jedoch mit Ja beantworten.

Beachte: Wenn unbeschränkte Kellerinhalte erlaubt wären, ginge dieses Argument nicht (auch wenn die Inklusion gelten kann).

Ergänzung: Da ein PDA, der seinen Keller ignoriert, im Wesentlichen genau ein endlicher Automat ist, gilt auch die Umkehrung: Jede reguläre Sprache kann von einem solchen Kellerautomaten mit beschränktem Keller erkannt werden. Also ist das Automaten-Modell sogar äquivalent zu regulären Sprachen und die Fragestellung äquivalent zum Inklusionsproblem für regulären Sprachen.

Aufgabe 2. Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-Normalform über $\Sigma = \{a, b\}$ mit $V = \{S, X, Y, A, B\}$, wobei P gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} S &\to AA \mid BB \mid XA \mid YB \\ X &\to AS \\ Y &\to BS \\ A &\to a \\ B &\to b \end{aligned}$$

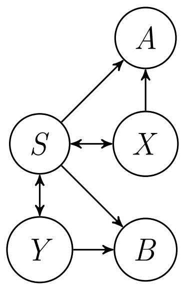
Überprüfen Sie mit dem Algorithmus aus der Vorlesung, ob $L(G)$ endlich ist.

Lösung zu Aufgabe 2.
1. Schritt: Bestimmen der produktiven Variablen:

1. $W = \varnothing$ (intitial)
2. $W = \{A, B\}$, da $(A \to a) \in P$ und $(B \to b) \in P$
3. $W = \{A, B, S\}$, da $(S \to AA) \in P$ und $A \in W$
4. $W = \{A, B, S, X, Y\}$, da $(X \to AS) \in P$ und $(Y \to BS) \in P$ und $A, B, S \in W$

Alle Nicht-Terminale sind produktiv.

2. Schritt: Betrachte den Graphen (W, E) mit Kanten
$E = \{(S, A), (S, B), (S, X), (S, Y), (X, A), (X, S), (Y, B), (Y, S)\}$



Es existiert ein nicht-leerer Zyklus $S \to X \to S$, daher ist $|L(G)| = \infty$.

Aufgabe 3 (Mehr zu Abschlusseigenschaften)**.** Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Zu welchen der drei Klassen

- deterministisch kontextfrei
- kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei
- nicht kontextfrei

gehören folgende Sprachen über Σ?

(a) $L_a = \{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält mindestens eines der Teilwörter ba, cb, ac, ca oder $\#_a(w) \neq \#_b(w)\}$

(b) $L_b = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)$ ist ungerade $\Rightarrow \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$

(c) $L_c = \{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält mindestens eines der Teilwörter ba, cb, ac, ca oder $\#_a(w) \neq \#_b(w)$ oder $\#_b(w) \neq \#_c(w)\}$

Beweisen Sie Ihre Antwort ausschließlich mit Hilfe der Abschlusseigenschaften (deterministisch) kontextfreier Sprachen, d.h. Sie dürfen nicht das Pumping-Lemma, kontextfreie Grammatiken oder Automaten verwenden. Sie dürfen jedoch verwenden, dass folgende Sprachen zu folgenden Klassen gehören:

$L_1 = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$	(deterministisch kontextfrei)
$L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$	(deterministisch kontextfrei)
$L_3 = \{a^l b^m c^n \mid l, m, n \geq 0\}$	(regulär)
$L_4 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$	(nicht kontextfrei)
$L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)$ ist gerade$\}$	(regulär)

Lösung zu Aufgabe 3.

(a) Es gilt $L_a = \overline{L_1}$. Aufgrund der Abgeschlossenheit deterministisch kontextfreier Sprachen unter Komplement ist L_a damit deterministisch kontextfrei.

(b) Es gilt $L_4' = L_4 \cap \overline{L_5} = (L_b \setminus L_5) \cap L_3$. Aufgrund der Abgeschlossenheit kontextfreier Sprachen unter Schnitt und Differenz mit regulären Sprachen ist L_b damit nicht kontextfrei.[1]

[1] $L_4' = L_4 \cap \overline{L_5} = \{a^n b^n c^n \mid n$ ungerade$\}$ ist auch nicht kontextfrei (ähnlicher Beweis wie für L_4).

(c) Es gilt $L_4 = \overline{L_c}$. Aufgrund der Abgeschlossenheit deterministisch kontextfreier Sprachen unter Komplement ist L_c damit nicht deterministisch kontextfrei. Weiterhin gilt $L_c = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$. Aufgrund der Abgeschlossenheit deterministisch kontextfreier Sprachen unter Komplement sind $\overline{L_1}$ und $\overline{L_2}$ deterministisch kontextfrei. Damit ist dann auch aufgrund der Abgeschlossenheit kontextfreier Sprachen unter Vereinigung L_c kontextfrei. Insgesamt ist L_c also kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei.

Aufgabe 4 (Fragestunde)**.** Notieren Sie sich Fragen zu FSA und stellen Sie dem Übungsleiter Ihre Fragen!