

Klausur zur Vorlesung
„Formale Sprachen und Automaten“
SS 2024 / 12. August 2024

Vorname: _____

Nachname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe	Punktzahl	Erreicht
1	16	
2	10	
3	6	
4	6	
5	6	
6	6	
7	6	
8	8	
9	6	
Bonus	0	
Σ	70	

Generelle Hinweise:

- Prüfungsdauer: **120 Minuten**
- Wenn Sie in der Klausur **35 Punkte** erreichen, haben Sie mit Sicherheit bestanden.
- Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Benutzen Sie ein **dokumentenechtes Schreibgerät**.
- Überprüfen Sie die Ihnen ausgehändigte Klausur auf Vollständigkeit (**10 Aufgaben** auf 11 Seiten).
- Tragen Sie **auf jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matr.-Nr.** in die entsprechenden Felder ein.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder. Reicht der Platz in einem Feld nicht aus, so benutzen Sie die Rückseite des entsprechenden Blattes und vermerken Sie dies auf der Vorderseite. Reicht der Platz dennoch nicht aus, können Sie die Aufsicht nach zusätzlichen Blättern fragen.
- Schreiben Sie bitte **deutlich**. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Ein **Täuschungsversuch** führt umgehend zum Ausschluss und **Nichtbestehen**. Es erfolgt keine Vorwarnung.
- Alle mitgeführten **elektronischen Geräte** sind vor der Klausur bzw. spätestens jetzt auszuschalten.

Inhaltliche Hinweise:

- Endliche Automaten können wahlweise grafisch oder tabellarisch angegeben werden.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1. (16 Punkte) Beantworten Sie die folgenden sieben Fragen. Für jede Teilaufgabe gibt es zwei Punkte, wenn Sie die Aufgabe vollständig und korrekt beantwortet haben.

- (1) Betrachten Sie folgende Grammatik:

$$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aAb \mid \varepsilon, A \rightarrow AA \mid a \mid b \mid \varepsilon\}, S)$$

Gilt $L(G) \subseteq \{a^m b^n \mid m > n\}$? Begründen Sie!

- (2) Betrachten Sie die folgenden regulären Ausdrücke:

$$(a) \alpha_1 = a^* b^* \quad (b) \alpha_2 = (a \mid b)^* \quad (c) \alpha_3 = b^* (a \mid b)^* a^* \quad (d) \alpha_4 = aab \mid a^* b^*$$

Wie viele verschiedene reguläre Sprachen werden durch die Ausdrücke erzeugt? Geben Sie diese auch an!

- (3) Sei M ein NFA mit n Zuständen. Sei außerdem $L(M) = L$. Welche Aussagen sind richtig?

- (a) L hat mindestens n Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen.
- (b) L hat höchstens 2^n Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen.
- (c) L hat mindestens n Elemente.
- (d) Es gibt einen NFA M' für L^* mit höchstens $n + 1$ Zuständen.

- (4) Geben Sie drei Sprachen K, L, M an mit $K \subseteq L \subseteq M$, so dass L regulär, K nicht regulär und M nicht kontextfrei ist.

Name:**Matrikelnummer:**

- (5) Welches Problem löst der CYK-Algorithmus und welche Voraussetzung benötigen Sie für die Input-Grammatik?

- (6) Gibt es zu jeder kontextfreien Sprache einen Kellerautomaten mit nur einem Zustand? Begründen Sie!

- (7) Sei L eine kontextfreie, aber nicht reguläre Sprache über einem Alphabet Σ . Sei h ein Homomorphismus mit $h(L) \neq \{\varepsilon\}$. Wie können Sie h wählen, um auf jeden Fall eine reguläre Sprache $h(L)$ zu erhalten?¹

- (8) Sei L eine Typ-0-Sprache, die nicht Typ-1 (kontextsensitiv) ist. Welche Eigenschaft muss eine Turingmaschine zwingend haben, die L akzeptiert?

¹Erinnerung: Ein (Alphabet-)Homomorphismus ist eine Abbildung $h : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$, wobei für alle $v, w \in \Sigma^*$ gelte: $h(vw) = h(v)h(w)$ und $h(\varepsilon) = \varepsilon$. Die Abbildung ist durch $h(a) = \gamma \in \Gamma^*$ für $a \in \Sigma$ eindeutig definiert. Es gilt ferner $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen einen endlichen Automaten und einen regulären Ausdruck an.

- (a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ist ungerade und enthält das Teilwort } ab\}$

- (b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } aa \text{ und die Anzahl der } a\text{'s in } w \text{ ist durch } 5 \text{ teilbar}\}$

- (c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } ab \text{ und endet mit } ba\}$

Name:

Matrikelnummer:

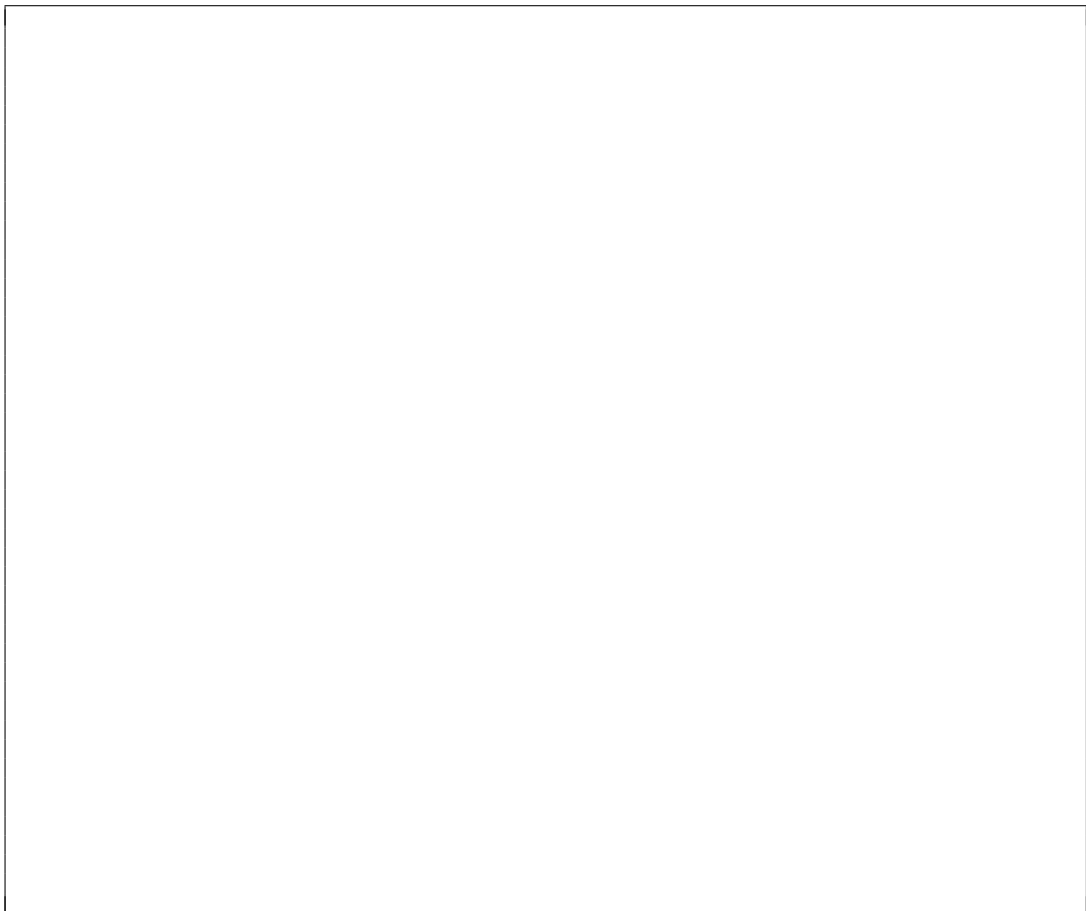
Aufgabe 3. (6 Punkte) Gegeben sei der NFA $M = (\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta, \{1\}, \{1\})$, wobei δ gegeben ist durch:

δ	a	b
1	$\emptyset$	$\{1, 3\}$
2	$\{3\}$	$\{2, 3\}$
3	$\{1, 2\}$	$\{3\}$

- (a) Zeichnen Sie das zu M gehörige Automatendiagramm.



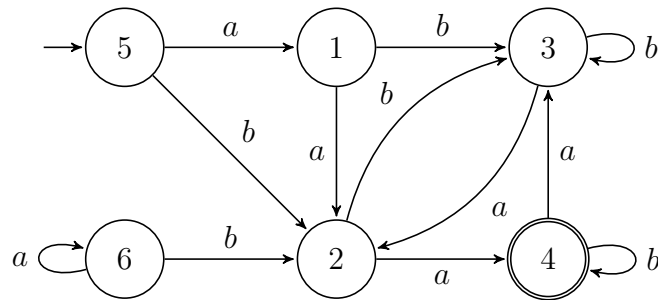
- (b) Geben Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen zu M äquivalenten DFA an. Es genügt, den vom Startzustand erreichbaren Teil anzugeben.



Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 4. (6 Punkte) Minimieren Sie den folgenden DFA mit dem Algorithmus aus der Vorlesung. Geben Sie an, welche Zustandspaare in welcher Reihenfolge markiert werden und **zeichnen Sie den erhaltenen minimalen DFA**.



Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 5. (6 Punkte) Gegeben sei folgende Sprache $L \subseteq \{a, b\}^*$ mit

$$L = \{a^n b^m \mid m = n + 1 \text{ oder } m + 6n \text{ ist durch } 7 \text{ teilbar}\}.$$

Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 6. (6 Punkte) Gegeben sei der folgende nichtdeterministische Kellerautomat $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$, wobei $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{\#, A\}$ und

- (1) $\delta(z_0, a, \#) = \{(z_1, A)\}$,
- (2) $\delta(z_0, a, A) = \{(z_1, AA)\}$,
- (3) $\delta(z_1, a, A) = \{(z_0, A)\}$,
- (4) $\delta(z_0, b, A) = \{(z_3, A)\}$,
- (5) $\delta(z_2, b, A) = \{(z_3, A)\}$,
- (6) $\delta(z_3, b, A) = \{(z_2, \varepsilon)\}$.

Die Modifikation aus Teilaufgabe (b) wird für (c) nicht beibehalten.

- (a) Welche Sprache wird von dem Kellerautomaten erkannt?

- (b) Anstelle von Transition (5) nehmen wir (5*) $\delta(z_2, b, A) = \{(z_2, \varepsilon)\}$. Welche Sprache erkennt der Automat nun?

- (c) Ersetze Transition (3) durch
 (3*) $\delta(z_1, a, A) = \{(z_0, AA)\}$
 und ersetze Transition (6) durch
 (6*) $\delta(z_3, b, A) = \{(z_2, A)\}$.

Welche Sprache erkennt der Kellerautomat nach dieser Modifikation?

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 7. (6 Punkte) Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$ mit

$$P : S \rightarrow BB \mid AB \mid CA$$

$$A \rightarrow BA \mid AC \mid a$$

$$B \rightarrow BC \mid b$$

$$C \rightarrow CB \mid c$$

Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort $babccb$ in $L(G)$ enthalten ist.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 8. (8 Punkte) Geben Sie für

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w = a^{3n}b^{n+m}c^{2m}, n, m \geq 1\}$$

eine kontextfreie Grammatik und einen Kellerautomaten an.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 9. (6 Punkte) Sei $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_f\}, \{a, b\}, \{a, b, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_f\})$ eine deterministische Turingmaschine mit

$$\delta(z_0, a) = (z_1, a, R)$$

$$\delta(z_0, b) = (z_0, b, N)$$

$$\delta(z_1, a) = (z_2, a, R)$$

$$\delta(z_1, b) = (z_1, b, R)$$

$$\delta(z_2, a) = (z_3, a, R)$$

$$\delta(z_2, b) = (z_2, b, R)$$

$$\delta(z_3, a) = (z_1, a, R)$$

$$\delta(z_3, b) = (z_3, b, R)$$

$$\delta(z_0, \square) = (z_0, \square, N)$$

$$\delta(z_1, \square) = (z_1, \square, N)$$

$$\delta(z_2, \square) = (z_2, \square, N)$$

$$\delta(z_3, \square) = (z_f, \square, N)$$

- (a) Akzeptiert M das Wort $w_1 = ababbb$? ☐ ja ☐ nein
(b) Akzeptiert M das Wort $w_2 = abbbabab$? ☐ ja ☐ nein
(c) Welche Sprache akzeptiert M ?

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 10. (5 Punkte (Bonus)) Sei L eine nicht reguläre und E eine endliche Sprache.

- (a) Zeigen Sie, dass dann $L \cup E$ und $L \setminus E$ auch nicht regulär sind.
- (b) Gilt dies auch, falls E regulär, aber nicht endlich ist?

Hinweis: Nutzen Sie für (a) die Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen.