

Klausur zur Vorlesung
„Formale Sprachen und Automaten“
SS 2024 / 12. August 2024

Vorname: _____

Nachname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe	Punktzahl	Erreicht
1	16	
2	10	
3	6	
4	6	
5	6	
6	6	
7	6	
8	8	
9	6	
Bonus	0	
Σ	70	

Generelle Hinweise:

- Prüfungsdauer: **120 Minuten**
- Wenn Sie in der Klausur **35 Punkte** erreichen, haben Sie mit Sicherheit bestanden.
- Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Benutzen Sie ein **dokumentenechtes Schreibgerät**.
- Überprüfen Sie die Ihnen ausgehändigte Klausur auf Vollständigkeit (**10 Aufgaben** auf 11 Seiten).
- Tragen Sie **auf jedes Blatt** Ihren **Namen** und Ihre **Matr.-Nr.** in die entsprechenden Felder ein.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder. Reicht der Platz in einem Feld nicht aus, so benutzen Sie die Rückseite des entsprechenden Blattes und vermerken Sie dies auf der Vorderseite. Reicht der Platz dennoch nicht aus, können Sie die Aufsicht nach zusätzlichen Blättern fragen.
- Schreiben Sie bitte **deutlich**. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Ein **Täuschungsversuch** führt umgehend zum Ausschluss und **Nichtbestehen**. Es erfolgt keine Vorwarnung.
- Alle mitgeführten **elektronischen Geräte** sind vor der Klausur bzw. spätestens jetzt auszuschalten.

Inhaltliche Hinweise:

- Endliche Automaten können wahlweise grafisch oder tabellarisch angegeben werden.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1. (16 Punkte) Beantworten Sie die folgenden acht Fragen. Für jede Teilaufgabe gibt es zwei Punkte, wenn Sie die Aufgabe vollständig und korrekt beantwortet haben.

- (1) Betrachten Sie folgende Grammatik:

$$G = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aAb \mid \varepsilon, A \rightarrow AA \mid a \mid b \mid \varepsilon\}, S)$$

Gilt $L(G) \subseteq \{a^m b^n \mid m > n\}$? Begründen Sie!

Lösung: Nein. G erzeugt alle Wörter, die mit a beginnen und mit b enden, also auch z.B. $abab$. Aber es gilt $abab \notin \{a^m b^n \mid m > n\}$.

- (2) Betrachten Sie die folgenden regulären Ausdrücke:

$$(a) \alpha_1 = a^* b^* \quad (b) \alpha_2 = (a \mid b)^* \quad (c) \alpha_3 = b^* (a \mid b)^* a^* \quad (d) \alpha_4 = aab \mid a^* b^*$$

Wie viele verschiedene reguläre Sprachen werden durch die Ausdrücke erzeugt? Geben Sie diese auch an!

Lösung: Es sind zwei Sprachen:

$$L(\alpha_1) = L(\alpha_4) = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$$

$$L(\alpha_2) = L(\alpha_3) = \{a, b\}^*$$

- (3) Sei M ein NFA mit n Zuständen. Sei außerdem $L(M) = L$. Welche Aussagen sind richtig?

- (a) L hat mindestens n Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen.
- (b) L hat höchstens 2^n Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen.
- (c) L hat mindestens n Elemente.
- (d) Es gibt einen NFA M' für L^* mit höchstens $n + 1$ Zuständen.

Lösung: (b) und (d) sind richtig. (b) ist Potenzmengenkonstruktion und (d) wird durch das Verfahren der Vorlesung für L^* realisiert.

- (4) Geben Sie drei Sprachen K, L, M an mit $K \subseteq L \subseteq M$, so dass L regulär, K nicht regulär und M nicht kontextfrei ist.

Lösung: Zum Beispiel:

$$K = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$$L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$$

$$M = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\} \cup \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

- (5) Welches Problem löst der CYK-Algorithmus und welche Voraussetzung benötigen Sie für die Input-Grammatik?

Lösung: Der CYK-Algorithmus löst das Wortproblem für kontextfreie Sprachen. Die Input-Grammatik muss in Chomsky-Normalform vorliegen.

- (6) Gibt es zu jeder kontextfreien Sprache einen Kellerautomaten mit nur einem Zustand? Begründen Sie!

Lösung: Ja: Man kann eine kontextfreie Grammatik mit dem Verfahren aus der Vorlesung stets in einen Kellerautomaten mit nur einem Zustand umwandeln. Damit geht das also für jede kontextfreie Sprache.

- (7) Sei L eine kontextfreie, aber nicht reguläre Sprache über einem Alphabet Σ . Sei h ein Homomorphismus mit $h(L) \neq \{\varepsilon\}$. Wie können Sie h wählen, um auf jeden Fall eine reguläre Sprache $h(L)$ zu erhalten?¹

Lösung: Unäre kontextfreie Sprachen sind bereits regulär. Außerdem sind kontextfreie Sprachen unter Homomorphismenbildung abgeschlossen (siehe Übungen). Also kann man $h(a) = a$ für ein $a \in \Sigma$ wählen und für alle anderen $b \in \Sigma \setminus \{a\}$ $h(b) = \varepsilon$ setzen.

- (8) Sei L eine Typ-0-Sprache, die nicht Typ-1 (kontextsensitiv) ist. Welche Eigenschaft muss eine Turingmaschine zwingend haben, die L akzeptiert?

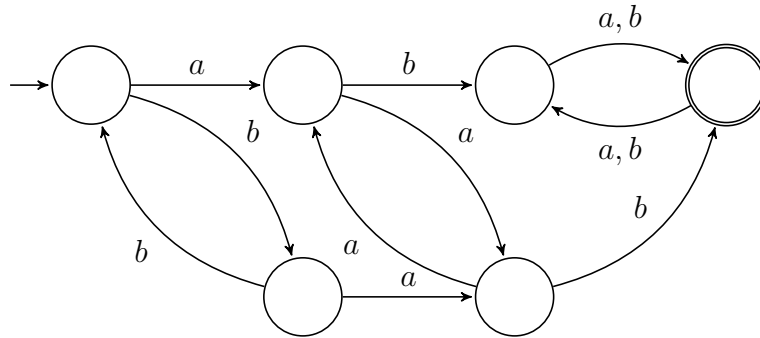
Lösung: Kontextsensitive Sprachen sind genau die, welche durch einen LBA erkannt werden. Mit anderen Worten, Typ-0-Sprachen, die nicht kontextsensitiv sind, kommen nicht mit dem beschränkten Platz aus und müssen für mindestens einen Input mindestens ein Blank durch ein anderes Zeichen ersetzen.

¹Erinnerung: Ein (Alphabet-)Homomorphismus ist eine Abbildung $h : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$, wobei für alle $v, w \in \Sigma^*$ gelte: $h(vw) = h(v)h(w)$ und $h(\varepsilon) = \varepsilon$. Die Abbildung ist durch $h(a) = \gamma \in \Gamma^*$ für $a \in \Sigma$ eindeutig definiert. Es gilt ferner $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$.

Aufgabe 2. (10 Punkte) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen einen endlichen Automaten und einen regulären Ausdruck an.

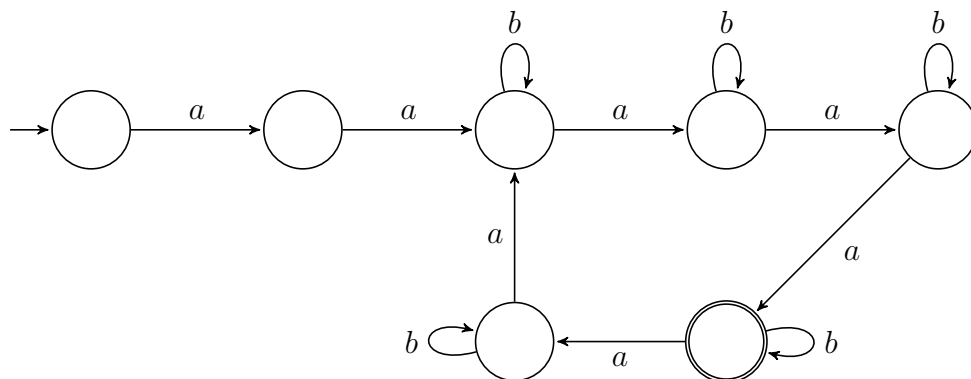
(a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ist ungerade und enth\"alt das Teilwort } ab\}$

Lösung: $(a|b)(aa|ab|ba|bb)^*ab(aa|ab|ba|bb)^*(aa|ab|ba|bb)^*ab(aa|ab|ba|bb)^*(a|b)$



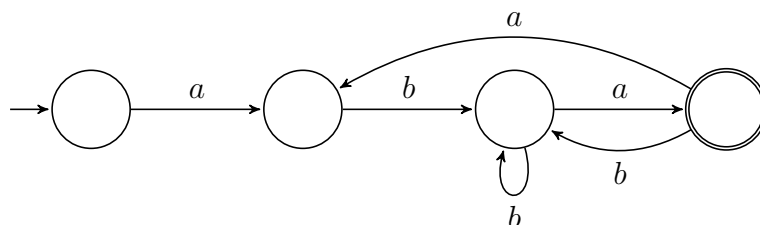
(b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } aa \text{ und die Anzahl der } a\text{'s in } w \text{ ist durch } 5 \text{ teilbar}\}$

Lösung: $aab^*ab^*ab^*a(b^*ab^*ab^*ab^*ab^*ab^*)^*$



(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } ab \text{ und endet mit } ba\}$

Lösung: $ab(a|b)^*ba|aba$



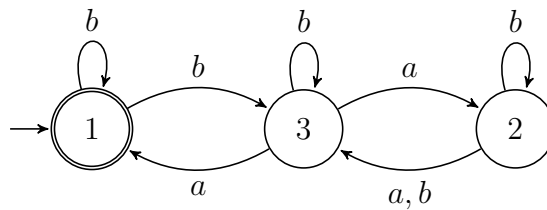
Name:

Matrikelnummer:

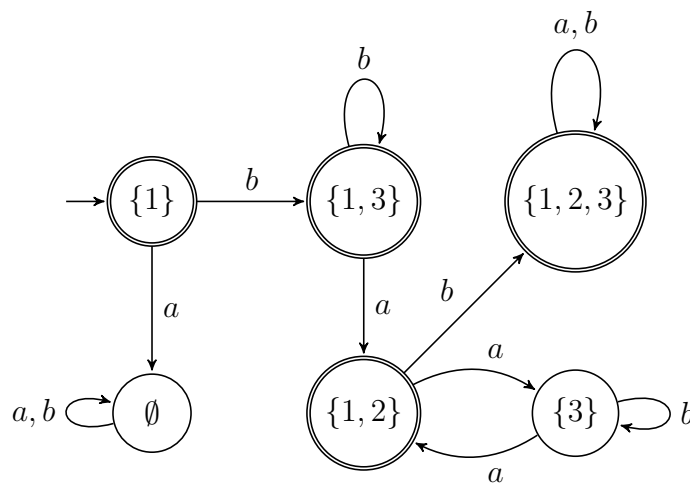
Aufgabe 3. (6 Punkte) Gegeben sei der NFA $M = (\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta, \{1\}, \{1\})$, wobei δ gegeben ist durch:

δ	a	b
1	$\emptyset$	$\{1, 3\}$
2	$\{3\}$	$\{2, 3\}$
3	$\{1, 2\}$	$\{3\}$

- (a) Zeichnen Sie das zu M gehörige Automatendiagramm.

Lösung:

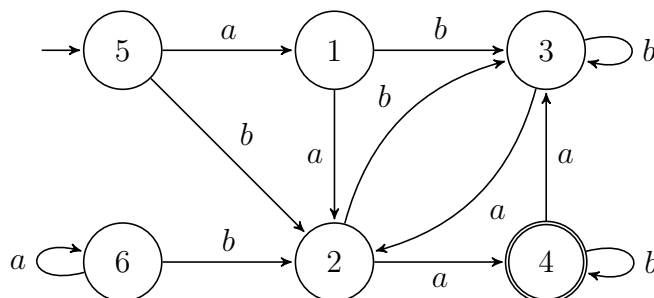
- (b) Geben Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen zu M äquivalenten DFA an. Es genügt, den vom Startzustand erreichbaren Teil anzugeben.

Lösung:

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 4. (6 Punkte) Minimieren Sie den folgenden DFA mit dem Algorithmus aus der Vorlesung. Geben Sie an, welche Zustandspaare in welcher Reihenfolge markiert werden und **zeichnen Sie den erhaltenen minimalen DFA**.

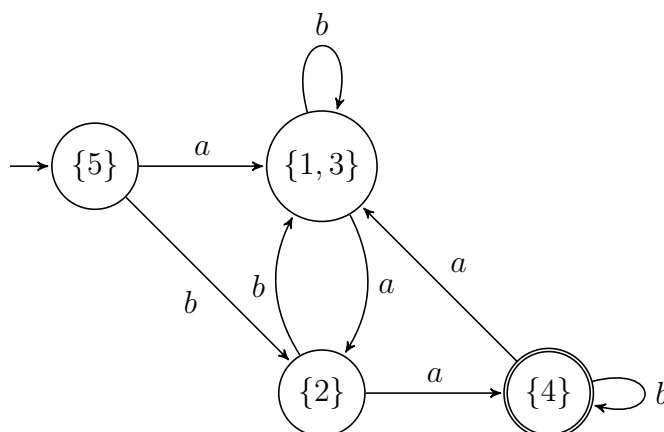
**Lösung:**

Zustand 6 ist nicht erreichbar, wird also entfernt.

2	3	-	-	-
3		2	-	-
4	1	1	1	-
5	4	5	6	1
	1	2	3	4

1. Trenne End- und Nichtendzustände.
2. Markiere (2, 3) wegen $\delta(2, a) = 4$ und $\delta(3, a) = 2$ und (4, 2) markiert.
3. Markiere (2, 1) wegen $\delta(2, a) = 4$ und $\delta(1, a) = 2$ und (4, 2) markiert.
4. Markiere (5, 1) wegen $\delta(5, a) = 1$ und $\delta(1, a) = 2$ und (2, 1) markiert.
5. Markiere (5, 2) wegen $\delta(5, a) = 1$ und $\delta(2, a) = 4$ und (4, 1) markiert.
6. Markiere (5, 3) wegen $\delta(5, a) = 1$ und $\delta(3, a) = 2$ und (2, 1) markiert.

1 und 3 sind erkenntungsäquivalent.



Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 5. (6 Punkte) Gegeben sei folgende Sprache $L \subseteq \{a, b\}^*$ mit

$$L = \{a^n b^m \mid m = n + 1 \text{ oder } m + 6n \text{ ist durch } 7 \text{ teilbar}\}.$$

Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

Lösung: Pumping Lemma mit $w = a^n b^{n+1}$:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $w = a^n b^{n+1}$. Dann ist $w \in L$ und $|w| = 2n + 1 \geq n$. Sei $w = xyz$ eine Zerlegung von w mit $|xy| \leq n$ und $|y| \geq 1$. Also gibt es $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $x = a^k$, $y = a^\ell$ und $z = a^{n-k-\ell} b^{n+1}$. Mit Pumpfaktor 8 erhalten wir

$$xy^8 z = a^k a^{8\ell} a^{n-k-\ell} b^{n+1} = a^{n+7\ell} b^{n+1}.$$

Da $\ell \geq 1$ gilt nun $n + 1 \neq n + 7\ell + 1$. Außerdem ist $n + 1 + 6(n + 7\ell) = 7n + 42\ell + 1$ nicht durch 7 teilbar, also $xy^8 z \notin L$. Somit ist L nach dem Pumping Lemma nicht regulär.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 6. (6 Punkte) Gegeben sei der folgende nichtdeterministische Kellerautomat $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$, wobei $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{\#, A\}$ und

- (1) $\delta(z_0, a, \#) = \{(z_1, A)\}$,
- (2) $\delta(z_0, a, A) = \{(z_1, AA)\}$,
- (3) $\delta(z_1, a, A) = \{(z_0, A)\}$,
- (4) $\delta(z_0, b, A) = \{(z_3, A)\}$,
- (5) $\delta(z_2, b, A) = \{(z_3, A)\}$,
- (6) $\delta(z_3, b, A) = \{(z_2, \varepsilon)\}$.

Die Modifikation aus Teilaufgabe (b) wird für (c) nicht beibehalten.

- (a) Welche Sprache wird von dem Kellerautomaten erkannt?

Lösung: $L(M) = \{a^{2n}b^{2n} \mid n \geq 1\}$

- (b) Anstelle von Transition (5) nehmen wir (5*) $\delta(z_2, b, A) = \{(z_2, \varepsilon)\}$. Welche Sprache erkennt der Automat nun?

Lösung: $L(M) = \{a^{2n}b^{n+1} \mid n \geq 1\}$

- (c) Ersetze Transition (3) durch
 (3*) $\delta(z_1, a, A) = \{(z_0, AA)\}$
 und ersetze Transition (6) durch
 (6*) $\delta(z_3, b, A) = \{(z_2, A)\}$.

Welche Sprache erkennt der Kellerautomat nach dieser Modifikation?

Lösung: $L(M) = \emptyset$

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 7. (6 Punkte) Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$ mit

$$P : S \rightarrow BB \mid AB \mid CA$$

$$A \rightarrow BA \mid AC \mid a$$

$$B \rightarrow BC \mid b$$

$$C \rightarrow CB \mid c$$

Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort $babccb$ in $L(G)$ enthalten ist.

Lösung: Der CYK-Algorithmus liefert folgende Tabelle:

Länge	b	a	b	c	c	b
1	B	A	B	C	C	B
2	A	S	B	$\emptyset$	C	-
3	S	S	B	$\emptyset$	-	-
4	S	S	S, B	-	-	-
5	S	S	-	-	-	-
6	S	-	-	-	-	-

Also ist $babccb \in L(G)$.

Aufgabe 8. (8 Punkte) Geben Sie für

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w = a^{3n}b^{n+m}c^{2m}, n, m \geq 1\}$$

eine kontextfreie Grammatik und einen Kellerautomaten an.

Lösung: Es gilt $L(G) = L$ mit $G = (\{S, A, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei

$$P : S \rightarrow AC$$

$$A \rightarrow aaaAb \mid aaab$$

$$C \rightarrow bCcc \mid bcc.$$

Ferner können wir jetzt einen Kellerautomaten mit dem Algorithmus aus der Vorlesung erhalten: Es gilt $L(M) = L$ mit $M = (\{z_0\}, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, S)$, wobei, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b, c, S, A, C\}$ und

- $\delta(z_0, \varepsilon, S) = \{(z_0, AC)\}$,
- $\delta(z_0, \varepsilon, A) = \{(z_0, aaaAb), (z_0, aaab)\}$,
- $\delta(z_0, \varepsilon, C) = \{(z_0, bCcc), (z_0, bcc)\}$,
- $\delta(z_0, a, a) = \{(z_0, \varepsilon)\}$,
- $\delta(z_0, b, b) = \{(z_0, \varepsilon)\}$,
- $\delta(z_0, c, c) = \{(z_0, \varepsilon)\}$.

Natürlich kann auch ein Kellerautomat „von Hand“ konstruiert werden. Außerdem ist es erlaubt, die in den Übungen eingeführte Diagrammrepräsentation für Kellerautomaten zu nutzen.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 9. (6 Punkte) Sei $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_f\}, \{a, b\}, \{a, b, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_f\})$ eine deterministische Turingmaschine mit

$$\delta(z_0, a) = (z_1, a, R)$$

$$\delta(z_0, b) = (z_0, b, N)$$

$$\delta(z_1, a) = (z_2, a, R)$$

$$\delta(z_1, b) = (z_1, b, R)$$

$$\delta(z_2, a) = (z_3, a, R)$$

$$\delta(z_2, b) = (z_2, b, R)$$

$$\delta(z_3, a) = (z_1, a, R)$$

$$\delta(z_3, b) = (z_3, b, R)$$

$$\delta(z_0, \square) = (z_0, \square, N)$$

$$\delta(z_1, \square) = (z_1, \square, N)$$

$$\delta(z_2, \square) = (z_2, \square, N)$$

$$\delta(z_3, \square) = (z_f, \square, N)$$

- (a) Akzeptiert M das Wort $w_1 = ababbb$? ☐ ja ☒ **nein**
- (b) Akzeptiert M das Wort $w_2 = abbbabab$? ☒ **ja** ☐ nein
- (c) Welche Sprache akzeptiert M ?

Lösung:

$$\begin{aligned} L(M) &= \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } a \text{ und Anzahl } a\text{'s in } w \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar}\} \\ &= L((ab^*ab^*ab^*)^*) \end{aligned}$$

Aufgabe 10. (5 Punkte (Bonus)) Sei L eine nicht reguläre und E eine endliche Sprache.

- (a) Zeigen Sie, dass dann $L \cup E$ und $L \setminus E$ auch nicht regulär sind.
- (b) Gilt dies auch, falls E regulär, aber nicht endlich ist?

Hinweis: Nutzen Sie für (a) die Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen.

Lösung: Die Menge E lässt sich zerlegen in $E = E_1 \cup E_2$, wobei E_1 und E_2 disjunkt sind (d.h. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$) und weiterhin gilt:

(1) $E_1 \subseteq L$

(2) $E_2 \cap L = \emptyset$

Mit anderen Worten, E partitioniert sich in die Elemente, die in L enthalten sind und jene, die nicht in L enthalten sind.

Aus (1) und (2) folgt, dass $L \cup E = L \cup E_2 =: L'$ und $L \setminus E = L \setminus E_1 =: L''$ ist. Außerdem können wir durch die speziellen Eigenschaften von E_1 und E_2 beide Gleichungen umdrehen, also $L \cup E_2 = L'$ ist äquivalent zu $L = L' \setminus E_2$ und $L \setminus E_1 = L''$ ist äquivalent zu $L = L'' \cup E_1$.

Wäre L' oder L'' regulär, so müsste auch L regulär sein (wegen Abschluss regulärer Sprachen unter Differenz und Vereinigung). Dies ist ein Widerspruch. Also folgt, dass $L \cup E$ und $L \setminus E$ nicht regulär sind.

Falls E auch eine unendliche Sprache sein darf, können wir einfach $E = \Sigma^*$ als Gegenbeispiel nehmen. Dann gilt $L \cup E = \Sigma^*$ und $L \setminus E = \emptyset$. Beide Sprachen sind aber regulär.