Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Compilerbau I
SS 2015

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 Führen Sie für die folgenden Grammatiken den Algorithmus zum Auffinden nichtproduktiver Nichtterminale durch:

- $G_1 = (\{a, b\}, \{S, A, B, C, D\}, P_1, S)$, wobei P_1 gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} S &\to AB \mid C \\ A &\to C \\ C &\to a \\ B &\to Da \\ D &\to Bb \end{aligned}$$

- $G_2 = (\{a, c\}, \{S, A, B, C\}, P_2, S)$, wobei P_2 gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} S &\to SA \\ A &\to AC \mid a \\ B &\to SAC \\ C &\to c \end{aligned}$$

Aufgabe 2 Beweisen Sie die zwei Aussagen aus dem Skript auf Seite 99 zur Korrektheit des Algorithmus zum Auffinden nichtproduktiver Nichtterminale.

Lösung: Wir bezeichnen das Workingset, das nach dem j-ten Schleifendurchlauf aktuell ist, mit W_j, die Result-Menge mit $result_j$ und die *count*-Menge mit $count_j$. Die Produktion, die im j-ten Schleifendurchlauf betrachtet wird, bezeichnen wir mit $A_j \to \alpha_j \in W_{j-1}$. Sei $NT(\alpha)$ die Menge der Nichtterminalzeichen von α. Wir definieren $rem_j(A \to \alpha)$ als die Menge aller Nichtterminalzeichen aus α, die im j-ten Schleifendurchlauf noch nicht als produktiv bekannt sind, also:

$$\begin{aligned} rem_0(A \to \alpha) &= NT(\alpha) \\ rem_j(A \to \alpha) &= rem_{j-1} \setminus \{A_j\} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgender Zusammenhang zu $count_j$:

$$count_j(A \to \alpha) = |rem_j(A \to \alpha)|$$

Wir bezeichnen die Menge der im j-ten Schleifendurchlauf fertigen Produktionen mit $done_j$:

$$done_j = \{A \to \alpha \mid rem_j(A \to \alpha) = \varnothing\}$$

Insbesondere ist also

$$done_0 = \{A \to w \mid w \in \Sigma^*\}$$

Wir stellen fest, dass

$$done_j \supseteq \ldots \supseteq done_0$$

eine absteigende Folge bildet. Das Workingset im j-ten Schleifendurchlauf ist definiert als:

$$\begin{aligned} W_0 &= done_0 \\ W_j &= W_{j-1} \setminus \{A_j \to \alpha_j\} \cup (done_j \cap \{A \to \alpha \mid A \in result_{j-1}\}) \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt, dass $W_j \subseteq done_j$. Das Ergebnis im j-ten Schleifendurchlauf ist

$$result_j = \{A_1, \ldots, A_j\}$$

Es gilt, dass $result_j \subseteq \{A \mid A \to \alpha \in done_j\}$.

- Falls A in der j-ten Iteration der **while**-Schleife in result eingefügt wird, so gibt es einen Ableitungsbaum für A mit Höhe maximal j.
  - Für $j = 1$ haben wir, dass $A_1 \to \alpha_1 \in W_0 = done_0$, also $\alpha_1 \in \Sigma^*$.
  - Sei $j > 1$. Es gilt, dass $A_j \to \alpha_j \in W_{j-1} \subseteq done_{j-1}$, also auch $rem_{j-1}(A_j \to \alpha_j) = \varnothing$. Dies kann aber nur gelten, wenn für alle $B \in NT(\alpha_j)$ ein $i_B < j$ existiert mit $A_{i_B} = B$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für A_{i_B} schon einen Ableitungsbaum mit Höhe höchstens i_B. Insgesamt gibt es also einen Ableitungsbaum für $A_j \to \alpha_j$ mit Höhe höchstens j.

- Für jeden Ableitungsbaum wird die Wurzel (genau) einmal in W eingefügt.

  Sei $A \to \alpha$ die Wurzel eines Ableitungsbaums. Wir müssen zeigen, dass es ein W_j gibt mit $A \to \alpha \in W_j$.
  - Offensichtlich sind alle $A \to w$ mit $w \in \Sigma^*$ bereits in W_0.

- Wir können nun annehmen, dass es für alle $B \in NT(\alpha)$ mit $B \to \beta_B$ ein W_{j_B} mit $B \to \beta_B \in W_{j_B}$ gibt. Damit gilt auch, dass $B \notin rem_{j_B}(A \to \alpha)$. Sei $j = max\{j_B\}$. Dann ist $A \to \alpha \in done_j$, aber $A \to \alpha \notin done_{j-1}$ und somit $A \notin result_{j-1}$. Somit ist $A \to \alpha \in W_j$.

Wir wollen uns außerdem davon überzeugen, dass jede Wurzel höchstens einmal eingefügt wird. Dazu stellen wir fest: Es gibt kein $A \to \alpha \in W_j$ mit $A \in result_{j-1}$, aber $result_j = result_{j-1} \cup \{A_j\}$. Somit kann $A_j \to \alpha_j$ in keinem W_k mit $k > j$ sein.