

## Übungsblatt 4

**Aufgabe 1.** Wir betrachten lineare Ordnungen auf  $\Sigma^*$ , wobei  $\Sigma = \{a, b\}$ .  
Definiere die *lexikographische Ordnung*  $<_{\text{lex}}$  durch

$$u <_{\text{lex}} v \iff u \text{ ist echtes Präfix von } v \text{ oder} \\ \text{es existieren } x, y, z \in \Sigma^* \text{ mit } u = xay \text{ und } v = xbz$$

und die *längen-lexikographische Ordnung*  $<_{\text{llex}}$  durch

$$u <_{\text{llex}} v \iff |u| < |v| \text{ oder } (|u| = |v| \text{ und } u <_{\text{lex}} v).$$

Zeigen Sie, dass die Relationen  $<_{\text{lex}}$  und  $<_{\text{llex}}$  synchron-rational sind.

**Aufgabe 2.** Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  regulär und  $n \geq 1$ . Zeigen Sie durch Konstruktion eines endlichen Automaten, dass die Sprache

$$\{w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \mid w_1, \dots, w_n \in L\} \subseteq (\Sigma_{\#}^n)^*$$

auch regulär ist.

**Aufgabe 3.** (a)  $(\mathbb{N}, \leq)$  ist automatisch präsentierbar.

(b) Sei  $M \subseteq \mathbb{N}$  (einstellige Relation), dann ist  $(\mathbb{N}, M)$  automatisch präsentierbar.

(c) Wenn  $(\mathbb{N}, R_1)$  automatisch präsentierbar und  $(\mathbb{N}, R_2)$  automatisch präsentierbar, ist dann auch  $(\mathbb{N}, R_1, R_2)$  automatisch präsentierbar?

**Hinweis für (c):** Wieviele automatisch präsentierbare Strukturen gibt es insgesamt? Wieviele nicht-isomorphe Strukturen  $(\mathbb{N}, \leq, M)$  für  $M \subseteq \mathbb{N}$  gibt es?