# Übungsblatt 10

**Aufgabe 1** Berechnen Sie die Vorausschautabellen für $k = 1$ zu folgenden Grammatiken.

- $G_1 = (\{\mathrm{id}, +, (, )\}, \{E, E', F\}, P_1, E)$, wobei $P_1$ gegeben ist durch:

$$E \to FE'$$
$$E' \to +FE' \mid \epsilon$$
$$F \to (E) \mid \mathrm{id}$$

**Lösung:**
Es gilt $\mathrm{First}_1(E) = \mathrm{First}_1(F) = \{\mathrm{id}, (\}$ und $\mathrm{First}_1(E') = \{\epsilon, +\}$.

Vorausschautabelle (nur die erreichbaren Zustände):

| | id | $+$ | ( | ) | $\epsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $[S' \to \bullet E, \{\epsilon\}]$ | $E \to FE'$ | | $E \to FE'$ | | |
| $[E \to \bullet F E', \{\epsilon\}]$ | $F \to \mathrm{id}$ | | $F \to (E)$ | | |
| $[E \to F \bullet E', \{\epsilon\}]$ | | $E' \to +FE'$ | | | $E' \to \epsilon$ |
| $[F \to (\bullet E), \{+, \epsilon\}]$ | $E \to FE'$ | | $E \to FE'$ | | |
| $[E' \to + \bullet F E', \{\epsilon\}]$ | $F \to \mathrm{id}$ | | $F \to (E)$ | | |
| $[E' \to +F \bullet E', \{\epsilon\}]$ | | $E' \to +FE'$ | | | $E' \to \epsilon$ |
| $[E \to \bullet F E', \{)\}]$ | $F \to \mathrm{id}$ | | $F \to (E)$ | | |
| $[E \to F \bullet E', \{)\}]$ | | $E' \to +FE'$ | | $E' \to \epsilon$ | |
| $[F \to (\bullet E), \{+, )\}]$ | $E \to FE'$ | | $E \to FE'$ | | |
| $[E' \to + \bullet F E', \{)\}]$ | $F \to \mathrm{id}$ | | $F \to (E)$ | | |
| $[E' \to +F \bullet E', \{)\}]$ | | $E' \to +FE'$ | | $E' \to \epsilon$ | |

Achtung: Die Tabelle kann für unerreichbare Zustände mehrere Einträge haben, obwohl die Grammatik $LL(1)$ ist, z.B.

$$M([E \to F \bullet E', \{+\}], +) = \{E' \to \epsilon, E' \to +FE'\}.$$

Aber: Ein Lookahead von $+$ ist bei $E$ nicht möglich, denn $+ \notin \mathrm{Follow}_1(E)$.

- $G_2 = (\{\mathrm{id}, +, =, \mathrm{num}\}, \{S, L, R\}, P_2, S)$, wobei $P_2$ gegeben ist durch:

$$S \to L = R \mid L++$$
$$L \to \mathrm{id}$$
$$R \to L \mid \mathrm{num}$$

Welche der Grammatiken sind $LL(1)$-Grammatiken?

**Aufgabe 2** Sei $G = (\{a, +, (, )\}, \{S, F\}, P, S)$, wobei $P$ gegeben ist durch:

$$
\begin{aligned}
S &\to (S + F) \\
S &\to F \\
F &\to a
\end{aligned}
$$

1. Berechnen Sie $\text{First}_1$ für jedes Nichtterminal.

   **Lösung:**

$$
\begin{array}{lrl}
0: & \text{First}_1(S) & \supseteq \varnothing \\
 & \text{First}_1(F) & \supseteq \varnothing \\
\hline
1: & \text{First}_1(S) & \supseteq \text{First}_1(F) \cup \text{First}_1((S+F)) \\
 & & \supseteq \varnothing \cup \text{First}_1(\{(\} \circ \varnothing \circ \{+\} \circ \varnothing \circ \{)\}) \\
 & & = \varnothing \\
 & \text{First}_1(F) & \supseteq \text{First}_1(a) = \{a\} \\
\hline
2: & \text{First}_1(S) & \supseteq \text{First}_1(F) \cup \text{First}_1((S+F)) \\
 & & \supseteq \{a\} \cup \text{First}_1(\{(\} \circ \varnothing \circ \{+\} \circ \{a\} \circ \{)\}) \\
 & & = \{a\} \\
\hline
3: & \text{First}_1(S) & \supseteq \text{First}_1(F) \cup \text{First}_1((S+F)) \\
 & & \supseteq \{a\} \cup \text{First}_1(\{(\} \circ \{a\} \circ \{+\} \circ \{a\} \circ \{)\}) \\
 & & = \{a\} \cup \{(\} = \{a, (\} \\
\hline
\end{array}
$$

2. Geben Sie den erweiterten Itemkellerautomaten für $k = 1$ an.

   **Lösung:**
   Expansionsübergänge (nur die erreichbaren Zustände):

$$
\begin{array}{l}
\{([S' \to \bullet S, \{\epsilon\}], \epsilon, [S' \to \bullet S, \{\epsilon\}][S \to \bullet F, \{\epsilon\}]), \\
([S' \to \bullet S, \{\epsilon\}], \epsilon, [S' \to \bullet S, \{\epsilon\}][S \to \bullet(S + F), \{\epsilon\}]), \\
\hline
([S \to \bullet F, \{\epsilon\}], \epsilon, [S \to \bullet F, \{\epsilon\}][F \to \bullet a, \{\epsilon\}]), \\
\hline
([S \to (\bullet S + F), \{\epsilon\}], \epsilon, [S \to (\bullet S + F), \{\epsilon\}][S \to \bullet F, \{+\}]), \\
([S \to (\bullet S + F), \{\epsilon\}], \epsilon, [S \to (\bullet S + F), \{\epsilon\}][S \to \bullet(S + F), \{+\}]), \\
([S \to (S + \bullet F), \{\epsilon\}], \epsilon, [S \to (S + \bullet F), \{\epsilon\}][F \to \bullet a, \{)\}]), \\
\hline
([S \to \bullet F, \{+\}], \epsilon, [S \to \bullet F, \{+\}][F \to \bullet a, \{+\}) \\
\hline
([S \to (\bullet S + F), \{+\}], \epsilon, [S \to (\bullet S + F), \{+\}][S \to \bullet F, \{+\}]), \\
([S \to (\bullet S + F), \{+\}], \epsilon, [S \to (\bullet S + F), \{+\}][S \to \bullet(S + F), \{+\}]), \\
([S \to (S + \bullet F), \{+\}], \epsilon, [S \to (S + \bullet F), \{+\}][F \to \bullet a, \{)\}])\} \\
\hline
\end{array}
$$

3. Geben Sie die Vorausschautabelle für $k = 1$ an.

   **Lösung:**
   (Nur die erreichbaren Zustände:)

| | $a$ | $+$ | $($ | $)$ | $\epsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $[S' \to \bullet S, \{\epsilon\}]$ | $S \to F$ | | $S \to (S + F)$ | | |
| $[S \to \bullet F, \{\epsilon\}]$ | $F \to a$ | | | | |
| $[S \to (\bullet S + F), \{\epsilon\}]$ | $S \to F$ | | $S \to (S + F)$ | | |
| $[S \to (S + \bullet F), \{\epsilon\}]$ | $F \to a$ | | | | |
| $[S \to \bullet F, \{+\}]$ | $F \to a$ | | | | |
| $[S \to (\bullet S + F), \{+\}]$ | $S \to F$ | | $S \to (S + F)$ | | |
| $[S \to (S + \bullet F), \{+\}]$ | $F \to a$ | | | | |

4. Woran erkennen Sie, dass es sich um eine $LL(1)$-Grammatik handelt?

   **Lösung:**
   Jede Zelle der Vorausschautabelle für die erreichbaren Zustände hat höchstens einen Eintrag.

5. Verwenden Sie die Vorausschautabelle, um eine akzeptierende Konfigurationsfolge für $w = (a + a)$ anzugeben.

**Aufgabe 3** Sei im Folgenden $\Sigma$ ein endliches Alphabet und $k \in \mathbb{N}$. Mit $\circ : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ bezeichnen wir die Konkatenation zweier Wörter. Sei $\diamond_k : \Sigma^* \to \Sigma^{\leq k}$ definiert als

$$\begin{aligned}\diamond_k(a_1 \dots a_n) &= a_1 \dots a_{\min(n,k)} \\ &= \begin{cases} a_1 \dots a_k & \text{falls } k \leq n, \\ a_1 \dots a_n & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

Sei außerdem $\odot_k : \Sigma^{\leq k} \times \Sigma^{\leq k} \to \Sigma^{\leq k}$ definiert als

$$w_1 \odot_k w_2 = \diamond_k(w_1 \circ w_2).$$

1. Welche Fälle treten bei $\diamond_k(w_1 \circ w_2)$ für $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ auf?

   **Lösung:**
   Wenn $k \leq |w_1|$, dann gilt $\diamond_k(w_1 \circ w_2) = \diamond_k(w_1)$. Andernfalls, wenn $k > |w_1|$, gilt $\diamond_k(w_1 \circ w_2) = w_1 \circ \diamond_{k-|w_1|}(w_2)$.

2. Zeigen Sie: Für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gilt, dass

$$\diamond_k(w_1 \circ w_2) = \diamond_k(\diamond_k(w_1) \circ \diamond_k(w_2)).$$

   **Lösung:**
   $k \leq |w_1|$**:** Es gilt $\diamond_k(w_1 \circ w_2) = \diamond_k(w_1)$. Außerdem folgt aus $|(\diamond_k(w_1))| = k$, dass $\diamond_k(\diamond_k(w_1) \circ \diamond_k(w_2)) = \diamond_k(\diamond_k(w_1)) = \diamond_k(w_1)$.

   $k > |w_1|$**:** Es gilt $\diamond_k(w_1 \circ w_2) = w_1 \diamond_{k-|w_1|} (w_2)$. Außerdem gilt, dass $\diamond_k(w_1) = w_1$, also

$$\begin{aligned}\diamond_k(\diamond_k(w_1) \circ \diamond_k(w_2)) &= \diamond_k(w_1 \circ \diamond_k(w_2)) \\ &= w_1 \circ \diamond_{k-|w_1|}(\diamond_k(w_2)) \\ &= w_1 \circ \diamond_{k-|w_1|}(w_2).\end{aligned}$$

   Der letzte Schritt folgt aus der Tatsache, dass für alle $w \in \Sigma^*$ und $k' \in \mathbb{N}$ mit $k' \leq k$ gilt, dass $\diamond_{k'}(\diamond_k(w)) = \diamond_{k'}(w)$.

3. Zeigen Sie, dass $(\Sigma^{\leq k}, \odot_k, \varepsilon)$ ein Monoid ist, also:

   - Für alle $w \in \Sigma^{\leq k}$ gilt $w \odot_k \varepsilon = \varepsilon \odot_k w = w$.

**Lösung:**
Es gilt $\diamond_k(w) = w$ für alle $w \in \Sigma^{\leq k}$, also

$$\begin{aligned} w \odot_k \varepsilon &= \diamond_k(w \circ \varepsilon) = \diamond_k(w) = w \\ \varepsilon \odot_k w &= \diamond_k(\varepsilon \circ w) = \diamond_k(w) = w. \end{aligned}$$

- Für alle $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^{\leq k}$ gilt $w_1 \odot_k (w_2 \odot_k w_3) = (w_1 \odot_k w_2) \odot_k w_3$.

  **Lösung:**

  Aus 2 folgt, dass für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gilt, dass

  $$\diamond_k(w_1 \circ w_2) = \diamond_k(w_1 \circ \diamond_k(w_2)) = \diamond_k(\diamond_k(w_1) \circ w_2),$$

  denn

  $$\begin{aligned} \diamond_k(w_1 \circ w_2) &= \diamond_k(\diamond_k(w_1) \circ \diamond_k(w_2)) \\ &= \diamond_k(\diamond_k(\diamond_k(w_1)) \circ \diamond_k(\diamond_k(w_2))) \\ &= \diamond_k(\diamond_k(w_1) \circ \diamond_k(\diamond_k(w_2))) \\ &= \diamond_k(w_1 \circ \diamond_k(w_2)), \end{aligned}$$

  (analog für die andere Gleichheit). Somit erhalten wir:

  $$\begin{aligned} (w_1 \odot_k w_2) \odot_k w_3 &= \diamond_k(\diamond_k(w_1 \circ w_2) \circ w_3) \\ &= \diamond_k((w_1 \circ w_2) \circ w_3) \\ &= \diamond_k(w_1 \circ (w_2 \circ w_3)) \\ &= \diamond_k(w_1 \circ \diamond_k(w_2 \circ w_3)) \\ &= w_1 \odot_k (w_2 \odot_k w_3). \end{aligned}$$

4. Schließen Sie aus 2, dass $\diamond_k : (\Sigma^*, \circ, \varepsilon) \to (\Sigma^{\leq k}, \odot_k, \varepsilon)$ ein Monoid-Homomorphismus ist, d.h. es gilt $\diamond_k(\varepsilon) = \varepsilon$ und für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gilt

   $$\diamond_k(w_1 \circ w_2) = \diamond_k(w_1) \odot_k \diamond_k(w_2).$$

   **Lösung:**
   Offensichtlich gilt $\diamond_k(\epsilon) = \epsilon$. Des Weiteren gilt, dass

   $$\diamond_k(w_1 \circ w_2) = \diamond_k(\diamond_k(w_1) \circ \diamond_k(w_2)) = \diamond_k(w_1) \odot_k \diamond_k(w_2).$$