

## Übungsblatt 14

**Aufgabe 1.** Die Softwarefirma HALTING & CO. KG bietet folgende Produkte zur Programmverifikation an.

- (a) Produkt A überprüft, ob ein gegebenes Programm auf allen Eingaben terminiert.
- (b) Produkt B überprüft, ob ein gegebenes Programm auf einer gegebenen Eingabe höchstens 1,000 Rechenschritte durchführt.
- (c) Produkt C überprüft, ob ein gegebenes Programm auf einer gegebenen Eingabe höchstens 1 GB Speicher benötigt.
- (d) Produkt D überprüft, ob ein gegebenes Programm niemals die Ausgabe 123 produziert.

Welche Produkte kann es tatsächlich geben?

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, dass die Menge der Primzahlen und die Menge der Quadratzahlen entscheidbar ist.

**Aufgabe 3.** Ein bekanntes Problem aus der Mathematik ist Hilberts zehntes Problem: Gegeben ein Polynom  $p(x_1, \dots, x_n)$  mit ganzzahligen Koeffizienten in  $n$  Variablen ( $n \geq 1$  beliebig), existieren  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$  mit  $p(x_1, \dots, x_n) = 0$ ? Erst 1970 wurde bewiesen, dass dieses Problem unentscheidbar ist.

- (a) Ist Hilberts zehntes Problem semi-entscheidbar?
- (b) Ist das Komplement semi-entscheidbar?

**Aufgabe 4** (★). Der ebenso geniale wie unberechenbare Wissenschaftler und Superbösewicht Doktor Meta ist unentschlossen. Ein neuer Held ist in Siegen aufgetaucht. Theorie-Man streift durch Siegen und bekämpft das Verbrechen. Doktor Meta weiß nicht, wo Theorie-Man seine Basis hat. Das Rennmotorrad von Theorie-Man, eine *Turing 3000*, hat keine Höchstgeschwindigkeit. Doktor Meta möchte Theorie-Man stellen. Er weiß aber nicht, wie er ihn finden kann.

Zur Vereinfachung des Problems überlegt er sich eine Abstraktion. Er modelliert den Ort von Theorie-Man als natürliche Zahl auf einem eindimensionalen Zahlenstrahl. Die Zeit diskretisiert er ebenfalls als natürliche

Zahl. Dann kann er mit einer Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  den Aufenthaltsort von Theorie-Man beschreiben. Er sucht nun ein System, mit dem er garantiert irgendwann zur richtigen Zeit am richtigen Ort ist.

Gegeben sei eine Funktion  $f(t) = v \cdot t + s_0$ . Die Parameter  $v \in \mathbb{N}$  und  $s_0 \in \mathbb{N}$  sind unbekannt, aber fest.

Beschreiben Sie einen Algorithmus, der eine Folge  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von natürlichen Zahlen ausgibt, so dass ein  $j \in \mathbb{N}$  mit  $s_j = f(j)$  existiert. (Der Algorithmus muss nicht terminieren, er muss nur irgendwann ein korrektes Folgenglied ausgeben.)