

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Überprüfen Sie, ob $(\mathbb{N}, \leq) \models \exists x \forall y (x \leq y)$ gilt, durch Anwendung des Satzes von Khoussainov und Nerode.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{A} = (A, R)$ eine automatische Struktur (R ist eine r -stellige Relation) und $F(x, y)$ eine prädikatenlogische Formel mit freien Variablen x und y , so dass

$$\equiv_F = \{(a, b) \in A \times A \mid \mathcal{A}_{[x/a, y/b]} \models F(x, y)\}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Der Quotient $\mathcal{A}/F = (B, R')$ ist wie folgt definiert:

- $B = \{[a]_{\equiv_F} \mid a \in A\}$
- $R' = \{([a_1]_{\equiv_F}, \dots, [a_r]_{\equiv_F}) \mid \exists (a'_1, \dots, a'_r) \in R \text{ mit } \forall i : a_i \equiv_F a'_i\}$

Zeigen Sie, dass \mathcal{A}/F wieder automatisch ist.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von $f(x) = x^4 - x^2 - 1$ im Intervall $(-2, 2)$ mit dem Satz von Sturm und Tarski.