Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Postsches Korrespondenzproblem (PCP)

Gegeben: Eine Folge von Paaren $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$ mit $k \geq 0, s_i, t_i \in \{0,1\}^*$ $(1 \leq i \leq k)$.
Frage: Existieren Indizes $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, k\}$ $(m \geq 1)$ mit $s_{i_1} \cdots s_{i_m} = t_{i_1} \cdots t_{i_m}$?

Seien e ein nullstelliges Funktionssymbol, f_0 und f_1 einstellige Funktionssymbole und P ein zweistelliges Relationssymbol. Zu einem String $z = c_1 \ldots c_\ell \in \{0,1\}^\ell$ $(\ell \geq 0)$ und einem Term t schreiben wir $f_z(t)$ für den Term $f_{c_\ell}(\ldots(f_{c_1}(t))\ldots)$. Seien

$$\phi_1 = \bigwedge_{i=1}^{k} P(f_{s_i}(e), f_{t_i}(e)),$$

$$\phi_2 = \forall v \forall w (P(v,w) \to \bigwedge_{i=1}^{k} P(f_{s_i}(v), f_{t_i}(w))),$$

$$\phi_3 = \exists z (P(z,z))$$

und sei $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2 \to \phi_3$. Zeigen Sie, dass ϕ genau dann allgemeingültig ist, wenn das Postsche Korrespondenzproblem eine Lösung hat.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Struktur $(\mathbb{N}, +, \cdot, s, 0)$. Verdeutlichen Sie sich das Prinzip von Gödels β-Funktion und beschreiben Sie damit die folgenden Aussagen:

(a) $x^y = z$ (mit freien Variablen x, y und z)

(b) Formulieren Sie den Großen Fermatschen Satz.

(c) Formulieren Sie das Collatz-Problem.