

## Übungsblatt 12

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie, dass die folgenden Haskell-Ausdrücke wohlgetypt sind, indem Sie jeweils Typherleitungen angeben.

(a) `\x -> ((+) x) 1`

**Lösung.**

$$\begin{array}{l}
 \Gamma \vdash \lambda x \rightarrow ((+) x) 1 : \text{Int} \rightarrow \text{Int} \\
 \quad \lfloor \Gamma \otimes [x/\text{Int}] \vdash ((+) x) 1 : \text{Int} \\
 \quad \quad \lfloor \Gamma \otimes [x/\text{Int}] \vdash (+) x : \text{Int} \rightarrow \text{Int} \\
 \quad \quad \quad \lfloor \Gamma \otimes [x/\text{Int}] \vdash (+) : \text{Int} \rightarrow \text{Int} \rightarrow \text{Int} \\
 \quad \quad \quad \quad \lfloor \Gamma \otimes [x/\text{Int}] \vdash x : \text{Int} \\
 \quad \quad \quad \quad \lfloor \Gamma \otimes [x/\text{Int}] \vdash 1 : \text{Int}
 \end{array}$$

(b) `let x = \y -> x y in x True`

**Lösung.** Sei  $\tau$  ein beliebiger Typ, z.B.  $\tau = \text{Bool}$ . Wir erhalten dann

$$\begin{array}{l}
 \Gamma \vdash \text{let } x = \lambda y \rightarrow x y \text{ in } x \text{ True} : \tau \\
 \quad \lfloor \Gamma \otimes [x/\text{Bool} \rightarrow \tau] \vdash \lambda y \rightarrow x y : \text{Bool} \rightarrow \tau \\
 \quad \quad \lfloor \Gamma \otimes [x/\text{Bool} \rightarrow \tau, y/\text{Bool}] \vdash x y : \tau \\
 \quad \quad \quad \lfloor \Gamma \otimes [x/\text{Bool} \rightarrow \tau, y/\text{Bool}] \vdash x : \text{Bool} \rightarrow \tau \\
 \quad \quad \quad \quad \lfloor \Gamma \otimes [x/\text{Bool} \rightarrow \tau, y/\text{Bool}] \vdash y : \text{Bool} \\
 \quad \quad \quad \quad \lfloor \Gamma \otimes [x/\text{Bool} \rightarrow \tau] \vdash x \text{ True} : \tau \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \lfloor \Gamma \otimes [x/\text{Bool} \rightarrow \tau] \vdash x : \text{Bool} \rightarrow \tau \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \lfloor \Gamma \otimes [x/\text{Bool} \rightarrow \tau] \vdash \text{True} : \text{Bool}
 \end{array}$$

(c) Wir definieren zunächst

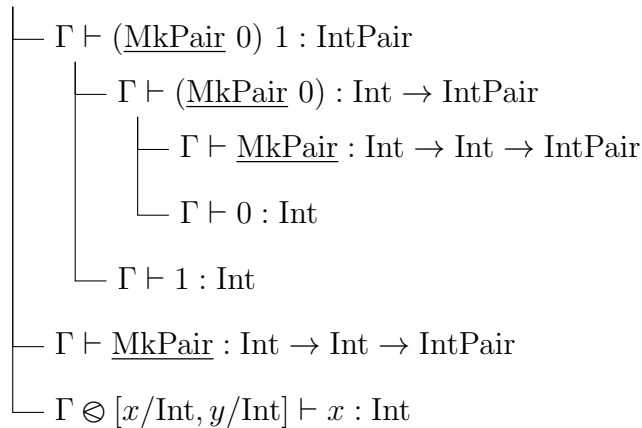
`data IntPair = MkPair Int Int`

und betrachten dann

`case (MkPair 0) 1 of { MkPair x y -> x }`

**Lösung.**

$\Gamma \vdash \text{case } (\underline{\text{MkPair}}\ 0)\ 1\ \text{of } \{ \underline{\text{MkPair}}\ x\ y\ \rightarrow\ x \} : \text{Int}$



**Aufgabe 2.** Wir betrachten wieder Ausdrücke der Form `if  $e_1$  then  $e_2$  else  $e_3$` .

(a) Geben Sie eine geeignete Typregel dafür an.

**Lösung.**

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \text{Bool} \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau \quad \Gamma \vdash e_3 : \tau}{\Gamma \vdash \text{if } e_1 \text{ then } e_2 \text{ else } e_3 : \tau}$$

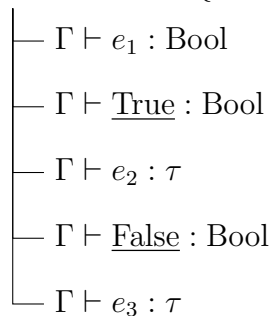
(b) Wie im letzten Übungsblatt übersetzen wir den Ausdruck wie folgt in Basissyntax:

`case  $e_1$  of {  $\underline{\text{True}}$  ->  $e_2$  ;  $\underline{\text{False}}$  ->  $e_3$  }`

Geben Sie so weit wie möglich eine Typherleitung für diesen Ausdruck an. Erreichen Sie dabei dieselben Annahmen wie bei Ihrer Regel für If-Then-Else?

**Lösung.**

$\Gamma \vdash \text{case } e_1 \text{ of } \{ \underline{\text{True}} \rightarrow e_2 ; \underline{\text{False}} \rightarrow e_3 \} : \tau$



$\Gamma \vdash \underline{\text{True}} : \text{Bool}$  und  $\Gamma \vdash \underline{\text{False}} : \text{Bool}$  gelten immer, also erreichen wir dieselben Annahmen.

**Aufgabe 3.** Führen Sie jeweils Typinferenz für die folgenden Ausdrücke durch. Notieren Sie das Typgleichungssystem, das Sie am Ende erhalten. Sie müssen dieses nicht lösen.

(a) `\x -> ((+) x) 1`

**Lösung.**

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash \backslash x \rightarrow ((+) x) 1 : \alpha \\ \quad \perp \Gamma \otimes [x/\alpha_1] \vdash ((+) x) 1 : \alpha_2 \{ \alpha = \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \} \\ \quad \quad \perp \Gamma \otimes [x/\alpha_1] \vdash (+) x : \alpha_3 \rightarrow \alpha_2 \\ \quad \quad \quad \perp \Gamma \otimes [x/\alpha_1] \vdash (+) : \alpha_4 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \alpha_2 \\ \quad \quad \quad \quad \perp \{ \alpha_4 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \alpha_2 = \text{Int} \rightarrow \text{Int} \rightarrow \text{Int} \} \\ \quad \quad \quad \quad \perp \Gamma \otimes [x/\alpha_1] \vdash x : \alpha_4 \{ \alpha_4 = \alpha_1 \} \\ \quad \quad \quad \quad \perp \Gamma \otimes [x/\alpha_1] \vdash 1 : \alpha_3 \{ \alpha_3 = \text{Int} \} \end{array}$$

Das Typgleichungssystem ist

$$\begin{array}{l} \{ \alpha = \alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \\ \alpha_4 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \alpha_2 = \text{Int} \rightarrow \text{Int} \rightarrow \text{Int}, \\ \alpha_4 = \alpha_1, \\ \alpha_3 = \text{Int} \}. \end{array}$$

(b) `case Nil of { Nil -> 0 ; Cons x y -> x }`

Hier nehmen wir an, dass

```
Nil :: List Int
Cons :: Int -> List Int -> List Int
```

**Lösung.**

$$\begin{array}{l}
\Gamma \vdash \mathbf{case} \ \underline{\mathbf{Nil}} \ \mathbf{of} \ \{ \underline{\mathbf{Nil}} \rightarrow 0 ; \underline{\mathbf{Cons}} \ x \ y \rightarrow x \} : \alpha \\
\left\{ \begin{array}{l}
\Gamma \vdash \underline{\mathbf{Nil}} : \alpha_1 \ \{ \alpha_1 = \mathbf{List}(\mathbf{Int}) \} \\
\Gamma \vdash \underline{\mathbf{Nil}} : \alpha_1 \ \{ \alpha_1 = \mathbf{List}(\mathbf{Int}) \} \\
\Gamma \vdash 0 : \alpha \ \{ \alpha = \mathbf{Int} \} \\
\Gamma \vdash \underline{\mathbf{Cons}} : \alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \alpha_1 \\
\{ \alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \alpha_1 = \mathbf{Int} \rightarrow \mathbf{List}(\mathbf{Int}) \rightarrow \mathbf{List}(\mathbf{Int}) \} \\
\Gamma \otimes [x/\alpha_2, y/\alpha_3] \vdash x : \alpha \ \{ \alpha = \alpha_2 \}
\end{array} \right.
\end{array}$$

Das Gleichungssystem ist

$$\left. \begin{array}{l}
\{ \alpha_1 = \mathbf{List}(\mathbf{Int}), \\
\alpha = \mathbf{Int}, \\
\alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \alpha_1 = \mathbf{Int} \rightarrow \mathbf{List}(\mathbf{Int}) \rightarrow \mathbf{List}(\mathbf{Int}), \\
\alpha = \alpha_2 \}.
\end{array} \right.$$

Gleichungen wie  $\alpha_1 = \mathbf{List}(\mathbf{Int})$ , die mehrmals auftreten, kann man in Mengenschreibweise natürlich zu einer zusammenfassen.