Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt (Wiederholung Logik I / GTI)

Aufgabe 1
Geben Sie zu jeder der folgenden prädikatenlogischen Formeln ein Modell und eine nicht-erfüllende Struktur an.

(a) $\exists x \forall y (f(f(y)) = x)$

(b) $\exists x \exists y (P(x, y) \wedge \neg P(y, x))$

(c) $\forall x \big(f(g(f(x))) \neq g(f(g(x))) \big)$

(d) $R(x) \wedge Q(y) \wedge \forall x (\neg R(x) \vee \neg Q(x))$

Lösung

(a) Die Formel sagt aus, dass ein Element x existiert, so dass für jedes Elemente y gilt, dass $f(f(y)) = x$.

- Modell: $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{A}})$, wobei $f^{\mathcal{A}}(x) = 1$ (für alle $x \in \mathbb{N}$)
Die Struktur $\mathcal{A}$ ist ein Modell für die Formel, weil das Element $1 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für beliebige $y \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(y)) = 1$.
Anderes Beispiel: $\mathcal{A}' = (\{1\}, I_{\mathcal{A}'})$, wobei $f^{\mathcal{A}'}(1) = 1$.
- Nicht-erfüllende Struktur: $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{B}})$, wobei $f^{\mathcal{B}}(x) = x$
Die Struktur $\mathcal{B}$ ist kein Modell für die Formel, weil kein Element x existiert, so dass für beliebige $y \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f^{\mathcal{B}}(f^{\mathcal{B}}(y)) = x$. Zum Beispiel haben wir $f^{\mathcal{B}}(f^{\mathcal{B}}(1)) = 1 \neq 2 = f^{\mathcal{B}}(f^{\mathcal{B}}(2))$.
Anderes Beispiel: $\mathcal{B}' = (\{0, 1\}, I_{\mathcal{B}'})$, wobei $f^{\mathcal{B}'}(x) = 1 - x$.

(b) Die Formel sagt aus, dass Elemente x und y existieren, so dass x in Relation zu y steht (bzgl. der Relation P) , aber y nicht in Relation zu x steht (bzgl. der Relation P).

- Modell: $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{A}})$, wobei $P^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\}$
Die Struktur $\mathcal{A}$ ist ein Modell für die Formel, weil beispielsweise für die Elemente $1 \in \mathbb{N}$ und $2 \in \mathbb{N}$ gilt, dass $1 < 2$ und somit $(1, 2) \in P^{\mathcal{A}}$, aber $2 < 1$ gilt nicht und somit $(2, 1) \notin P^{\mathcal{A}}$.
Anderes Beispiel: $\mathcal{A}' = (\{0, 1\}, I_{\mathcal{A}'})$, wobei $P^{\mathcal{A}'} = \{(1, 0), (0, 0)\}$.
- Nicht-erfüllende Struktur: $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{B}})$, wobei $P^{\mathcal{B}} = \emptyset$
Die Struktur $\mathcal{B}$ ist kein Modell für die Forme l, weil die Relation $P^{\mathcal{B}}$ leer ist und somit kein Paar (x, y) existiert mit $(x, y) \in P^{\mathcal{B}}$.
Anderes Beispiel: $\mathcal{B}' = (\{1\}, I_{\mathcal{B}'})$, wobei $P^{\mathcal{B}'} = \{(1, 1)\}$.

(c) Die Formel sagt aus, dass $f(g(f(x)))$ und $g(f(g(x)))$ für alle x unterschiedliche Ergebnisse liefern.

- Modell: $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I_\mathcal{A})$, wobei $f^\mathcal{A}(x) = 1$ und $g^\mathcal{A}(x) = 2$ (jeweils für alle $x \in \mathbb{N}$)
  Die Struktur $\mathcal{A}$ ist ein Modell für die Formel, weil $f^\mathcal{A}(g^\mathcal{A}(f^\mathcal{A}(x))) = 1$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt und $g^\mathcal{A}(f^\mathcal{A}(g^\mathcal{A}(x))) = 2$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt.
  Anderes Beispiel: $\mathcal{A}' = (\mathbb{Z}, I_{\mathcal{A}'})$, wobei $f^{\mathcal{A}'}(x) = x - 1$ und $g^{\mathcal{A}'}(x) = x + 1$.
- Nicht-erfüllende Struktur: $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, I_\mathcal{B})$, wobei $f^\mathcal{B}(x) = g^\mathcal{B}(x) = x$
  Die Struktur $\mathcal{B}$ ist kein Modell für die Formel, weil $f^\mathcal{B} = g^\mathcal{B}$ und somit gilt ebenso $f^\mathcal{B}(g^\mathcal{B}(f^\mathcal{B}(x))) = g^\mathcal{B}(f^\mathcal{B}(g^\mathcal{B}(x)))$ für alle $x \in \mathbb{N}$.
  Anderes Beispiel: $\mathcal{B}' = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{B}'})$, wobei $f^{\mathcal{B}'}(x) = x^2$ und $g^{\mathcal{B}'}(x) = x^3$.

(d) Die Formel sagt aus, dass das Element x (eine freie Variable) in der Menge R (eine einstellige Relation) liegt. Außerdem liegt das Element y (ebenfalls eine freie Variable) in der Menge Q (ebenfalls eine einstellige Relation). Zusätzlich gilt für alle Elemente x (diese Variable repräsentiert alle Elemente des Universums und ist von der freien Variable mit dem gleichen Bezeichner zu unterscheiden), dass sie nicht in der Menge R oder nicht in der Menge Q liegen.

- Modell: $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I_\mathcal{A})$, wobei $x^\mathcal{A} = 2$, $y^\mathcal{A} = 3$, $R^\mathcal{A} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ und $Q^\mathcal{A} = \mathbb{N} \setminus R^\mathcal{A}$
  Die Struktur $\mathcal{A}$ ist ein Modell für die Formel, weil $R^\mathcal{A}$ die geraden natürlichen Zahlen sind und $Q^\mathcal{A}$ die ungeraden natürlichen Zahlen sind. Es gilt, dass $x^\mathcal{A} = 2$ gerade ist und $y^\mathcal{A} = 3$ ungerade ist, außerdem ist jede natürliche Zahl nicht gerade oder nicht ungerade.
  Anderes Beispiel: $\mathcal{A}' = (\{0,1\}, I_{\mathcal{A}'})$, wobei $x^{\mathcal{A}'} = 0$, $y^{\mathcal{A}'} = 1$, $R^{\mathcal{A}'} = \{0\}$ und $Q^{\mathcal{A}'} = \{1\}$.
- Nicht-erfüllende Struktur: $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, I_\mathcal{B})$, wobei $x^\mathcal{B} = y^\mathcal{B} = 1$ und $R^\mathcal{B} = Q^\mathcal{B} = \mathbb{N}$
  Die Struktur $\mathcal{B}$ ist kein Modell für die Formel, weil alle Elemente des Universums in $R^\mathcal{B}$ und $Q^\mathcal{B}$ liegen und somit kein Element nicht in $R^\mathcal{B}$ oder nicht in $Q^\mathcal{B}$ liegt.
  Anderes Beispiel: $\mathcal{B}' = (\{0,1\}, I_{\mathcal{B}'})$, wobei $x^{\mathcal{B}'} = y^{\mathcal{B}'} = 1$ und $R^{\mathcal{B}'} = Q^{\mathcal{B}'} = \{0\}$.

Aufgabe 2

Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein einstelliges Prädikatensymbol R. Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{A}_1})$, wobei $f^{\mathcal{A}_1}(x,y) = x \cdot y$, $R^{\mathcal{A}_1} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist eine Primzahl}\}$
- $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{A}_2})$, wobei $f^{\mathcal{A}_2}(x,y) = x - 2y$, $R^{\mathcal{A}_2} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

(a) $\forall x(R(x) \vee R(f(x,x)))$

(b) $\forall x \exists y R(f(x,y))$

(c) $\forall x \forall y(f(x,y) = f(y,x))$

Lösung

(a) $\mathcal{A}_1$ ist kein Modell für diese Formel, weil zum Beispiel weder 4 eine Primzahl ist und damit in $R^{\mathcal{A}_1}$ liegt noch $f^{\mathcal{A}_1}(4,4) = 4 \cdot 4 = 16$ eine Primzahl ist und damit in $R^{\mathcal{A}_1}$ liegt.
$\mathcal{A}_2$ ist ein Modell für diese Formel, da $f^{\mathcal{A}_2}(x,x) = x - 2x = -x$ und für jede reelle Zahl x gilt, dass $x \leq 0$ oder $-x \leq 0$ und somit $x \in R^{\mathcal{A}_2}$ oder $f^{\mathcal{A}_2}(x,x) \in R^{\mathcal{A}_2}$.

(b) $\mathcal{A}_1$ ist kein Modell für diese Formel, weil z.B. für $x = 4$ kein $y \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x \cdot y$ eine Primzahl ist.
$\mathcal{A}_2$ ist ein Modell für diese Formel, da man für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $y \in \mathbb{R}$ findet, so dass $x - 2y \leq 0$ gilt. Falls $x \leq 0$ bereits gilt, so wählt man z.B. $y = 0$. Andernfalls, für $x > 0$ wählt man z.B. $y = x$ und somit gilt $x - 2y = x - 2x = -x \leq 0$.

(c) $\mathcal{A}_1$ ist ein Modell für diese Formel, da die Multiplikation kommutativ ist, also $x \cdot y = y \cdot x$.
$\mathcal{A}_2$ ist kein Modell für diese Formel, da zum Beispiel für $x = 1$ und $y = 2$ gilt, dass $x - 2y = -3 \neq 0 = y - 2x$.

Aufgabe 3
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache über dem Alphabet Σ.

(a) Wie ist das Komplement von L definiert?

(b) Wann ist L entscheidbar?

(c) Wann ist L semi-entscheidbar ?

(d) Wann ist L rekursiv-aufzählbar ?

(e) Welche Zusammenhänge bestehen zwischen (b), (c) und (d)?

Lösung

Die exakten Definitionen mit Kontext entnehmen Sie bitte dem Skript für Grundlagen der theoretischen Informatik.

(a) Für $L \subseteq \Sigma^*$ ist das Komplement $\bar{L}$ definiert als $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$. Mit anderen Worten enthält das Komplement von L alle Wörter, die nicht in L enthalten sind.

(b) Die charakteristische Funktion χ_L einer Sprache L ist wie folgt definiert:

$$\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & w \in L \\ 0 & w \notin L \end{cases}$$

Eine Sprache L ist entscheidbar, genau dann wenn die Funktion χ_L berechenbar ist, d.h. eine Turing Maschine (bzw. ein Programm) existiert, welche bei Eingabe w die Ausgabe $\chi_L(w)$ produziert.

(c) Die halbe charakteristische Funktion χ'_L einer Sprache L ist wie folgt definiert:

$$\chi'_L(w) = \begin{cases} 1 & w \in L \\ \text{undefiniert} & w \notin L \end{cases}$$

Eine Sprache L ist semi-entscheidbar, genau dann wenn die Funktion χ'_L berechenbar ist, d.h. eine Turing Maschine (bzw. ein Programm) existiert, welche bei Eingabe w die Ausgabe 1 produziert falls $w \in L$ und andernfalls nicht terminiert.

(d) Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist rekursiv-aufzählbar, genau dann wenn $L = \emptyset$ oder eine totale berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ existiert, so dass

$$L = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(e) Eine Sprache L ist entscheidbar, genau dann wenn L und $\bar{L}$ semi-entscheidbar sind. Eine Sprache L ist semi-entscheidbar, genau dann wenn L rekursiv-aufzählbar ist.