Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 2

Aufgabe 1
Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Struktur. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ genau dann entscheidbar ist, wenn $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_{rel})$ entscheidbar ist.

Lösung
Wir haben zwei Richtungen zu zeigen:

Zuerst zeigen wir, dass wenn $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ entscheidbar ist, dann ist auch $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_{rel})$ entscheidbar. Dazu wandeln wir eine Formel F ($\mathcal{A}_{rel}$ ist passend zu F) in eine Formel F' ($\mathcal{A}$ ist passend zu F') um, so dass $\mathcal{A}_{rel} \models F$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{A} \models F'$ gilt. Wenn wir diesen Schritt erfolgreich durchgeführt haben, dann können wir mit Hilfe des Entscheidungsalgorithmus für $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ prüfen ob $F' \in \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ und wissen somit auch ob für die ursprüngliche Formel $F \in \mathrm{Th}(\mathcal{A}_{rel})$ gilt. Somit wäre auch $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_{rel})$ entscheidbar.
Sei F also eine Formel und $\mathcal{A}_{rel}$ passend zu F. Jede atomare Formel in F ist von der Gestalt $R(x_1, \ldots, x_n)$, wobei $x_1, \ldots, x_n$ Variablen sind. Wenn R in $\mathcal{A}$ ein Relationssymbol ist, dann lassen wir $R(x_1, \ldots, x_n)$ in F' unverändert. Wenn R in $\mathcal{A}$ ein Funktionssymbol ist, so ersetzen wir $R(x_1, \ldots, x_n)$ in F' durch $x_n = R(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Die Korrektheit dieser Umwandlung folgt direkt aus der Definition von $\mathcal{A}_{rel}$.

Es fehlt noch zu zeigen, dass wenn $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_{rel})$ entscheidbar ist, dann ist auch $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ entscheidbar. Analog zur Vorgehensweise von oben wandeln wir eine Formel F ($\mathcal{A}$ passend zu F) in eine Formel F' ($\mathcal{A}_{rel}$ passend zu F'), so dass $\mathcal{A} \models F$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{A}_{rel} \models F'$ gilt. Wir beginnen mit einem Beispiel, welches verdeutlichen sollte, wie das Prinzip funktionieren wird: Die Formel $F = \exists x R(f(x))$ wird umgewandelt zu $F' = \exists x \forall y (f(x,y) \to R(y))$. Dabei ist zu beachten, dass $f(x,y)$ bzgl. $\mathcal{A}_{rel}$ eine Relation ist, die "$f(x) = y$" bzgl. $\mathcal{A}$ ausdrückt (siehe Definition von $\mathcal{A}_{rel}$). Nun formal: Sei t ein beliebiger Term. Wir definieren induktiv eine Variable v_t, die den Platz von t einnimmt, eine Menge X_t, die die neuen Variablen für t enthält, und eine Formel F_t, die die Zusammenhänge von t zur restlichen Formel ausdrückt. Sei 1 irgendeine Formel, die eine Tautologie ist. Für jede Variable x definieren wir $v_x = x$, $X_x = \emptyset$ und $F_x = 1$. Sei $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term. Wir wählen eine neue Variable v_t und setzen $X_t = \{v_t\} \cup \bigcup \{X_{t_i} \mid 1 \le i \le n\}$ und $F_t = f(v_{t_1}, \ldots, v_{t_n}, v_t)$. Im Beispiel haben wir $v_x = x$, $X_x = \emptyset$, $F_x = 1$, $v_{f(x)} = y$, $X_{f(x)} = \{y\}$ und $F_{f(x)} = f(x,y)$. Sei $R(t_1, \ldots, t_n)$ eine atomare Formel in F und sei $\{x_1, \ldots, x_m\} = \bigcup \{X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\}$. Wir ersetzen $R(t_1, \ldots, t_n)$ in F' durch

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m ((F_{t_1} \wedge \cdots \wedge F_{t_n}) \to R(v_{t_1}, \ldots, v_{t_n})).$$

Im Beispiel wird $R(f(x))$ durch $\forall y (f(x,y) \to R(y))$ ersetzt. Die Korrektheit dieser Umwandlung im Sinne der geforderten Eigenschaften folgt wiederum aus der Definition von $\mathcal{A}_{rel}$ und der beschriebenen Konstruktion.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, s, 0)$ genau dann unentscheidbar ist, wenn $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot)$ unentscheidbar ist.

Lösung
Wir zeigen die Aussage für "entscheidbar" an Stelle von "unentscheidbar", was äquivalent ist. Offensichtlich gilt für jede Formel F mit $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ passend zu F, dass $(\mathbb{N}, +, \cdot) \models F$ genau dann gilt, wenn auch $(\mathbb{N}, +, \cdot, s, 0) \models F$ gilt (die Formel F enthält weder s noch 0, da bereits $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ passend zu F ist). Damit folgt direkt, dass wenn $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, s, 0)$ entscheidbar ist, dann auch $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot)$.
Für die andere Richtung sei F eine Formel, wobei $(\mathbb{N}, +, \cdot, s, 0)$ passend zu F ist. Wir konstruieren eine Formel F' ($(\mathbb{N}, +, \cdot)$ passend zu F') so dass $(\mathbb{N}, +, \cdot) \models F'$ genau dann gilt, wenn auch $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, s, 0) \models F$ gilt. Zur Vereinfachung gehen wir zuerst zur Relationsschreibweise über, d.h. sei F'' eine Formel so dass $(\mathbb{N}, +, \cdot, s, 0)_{rel} \models F''$ genau dann gilt, wenn $(\mathbb{N}, +, \cdot, s, 0) \models F$ gilt (siehe Aufgabe 1). Die resultierende Formel F' erhalten wir, indem wir folgende Ersetzungen in F'' durchführen: Alle Vorkommen von $0(x)$ in F'' ersetzen wir durch $\forall y(\cdot(x, y, x))$ (also $x = y \cdot x$ und somit $x = 0$). Alle Vorkommen von $s(x, y)$, was $y = x + 1$ bedeutet, ersetzen wir durch $\forall u \forall z(\cdot(z, u, z) \rightarrow +(x, u, y))$ (wobei $u = 1$, da $z \cdot u = z$ für alle z gelten muss und $+(x, u, y)$ ist die Relationsschreibweise für $x + u = y$).

Aufgabe 3
Betrachten Sie die Struktur $(\mathbb{N}, +, \cdot, s, 0)$. Verdeutlichen Sie sich das Prinzip von Gödels β-Funktion und beschreiben Sie mit deren Hilfe die folgenden Aussagen:

(a) $x^y = z$ (mit freien Variablen x, y und z)

(b) Formulieren Sie den Großen Fermatschen Satz.

(c) Formulieren Sie das Collatz-Problem.

Lösung
Die Formeln werden hier nur (detailliert) beschrieben. Setzen Sie als selbstständige Übung die Formeln in der Schreibweise der Prädikatenlogik ordentlich zusammen.

(a) $x^y = z$ wollen wir ausdrücken als: Es gibt eine Folge $(a_1, \ldots, a_y, a_{y+1})$ mit $a_1 = 1$, $a_{i+1} = a_i \cdot x$ für $1 \leq i \leq y$ und $a_{y+1} = z$. Dies gilt genau dann, wenn es $t, p \in \mathbb{N}$ gibt mit $\beta(t, p, 1) = 1$, $\beta(t, p, i + 1) = \beta(t, p, i) \cdot x$ für alle $1 \leq i \leq y$ und $\beta(t, p, y + 1) = z$.

(b) Der Große Satz von Fermat besagt: Für alle natürlichen Zahlen $a, b, c \geq 1$ und $n \geq 2$ gilt $a^n + b^n \neq c^n$. Wir wissen bereits, wie man $x^y = z$ ausdrückt. Aus Übungsblatt 1, Aufgabe 2 wissen wir, wie man die 1, die 2 und die Relation $\geq$ ausdrückt. Wir können also schreiben: Wenn $a, b, c \geq 1$ und $n \geq 2$ und $a^n = a'$, $b^n = b'$ und $c^n = c'$, dann gilt $a' + b' \neq c'$.

(c) Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert als $f(2n) = n$ und $f(2n+1) = 3(2n+1)+1$. Sei C_n die unendliche Folge $(n, f(n), f(f(n)), \dots)$. Wir schreiben $C_n[i]$ für das i'te Element der Folge. Das Collatz-Problem ist nun definiert als: Gibt es für jedes n eine Stelle j so dass $C_n[j] = 1$? Die Funktion f können Sie beschreiben in dem Sie zwischen geraden $(2n)$ und ungeraden $(2n+1)$ Zahlen unterscheiden und die Zahlen 2 und 3 definieren (siehe Übungsblatt 1, Aufgabe 2). Mit der β-Funktion lässt sich dann das Collatz-Problem wie folgt ausdrücken: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $t, p \in \mathbb{N}$, so dass $\beta(t,p,1) = n$, $\beta(t,p,i+1) = f(\beta(t,p,i))$ für alle $i \in \mathbb{N}$, und es gibt ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\beta(t,p,j) = 1$.