Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Logik II
SS 2020

Übungsblatt 4

Aufgabe 1
Wir betrachten lineare Ordnungen auf Σ^*, wobei $\Sigma = \{a, b\}$. Definiere die *lexikographische Ordnung* $<_{\mathsf{lex}}$ durch

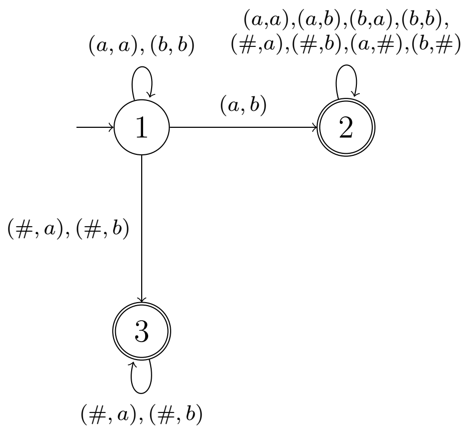
$$\begin{aligned} u <_{\mathsf{lex}} v \iff & u \text{ ist echtes Präfix von } v \text{ oder} \\ & \text{es existieren } x, y, z \in \Sigma^* \text{ mit } u = xay \text{ und } v = xbz \end{aligned}$$

und die *längen-lexikographische Ordnung* $<_{\mathsf{llex}}$ durch

$$u <_{\mathsf{llex}} v \iff |u| < |v| \text{ oder } (|u| = |v| \text{ und } u <_{\mathsf{lex}} v).$$

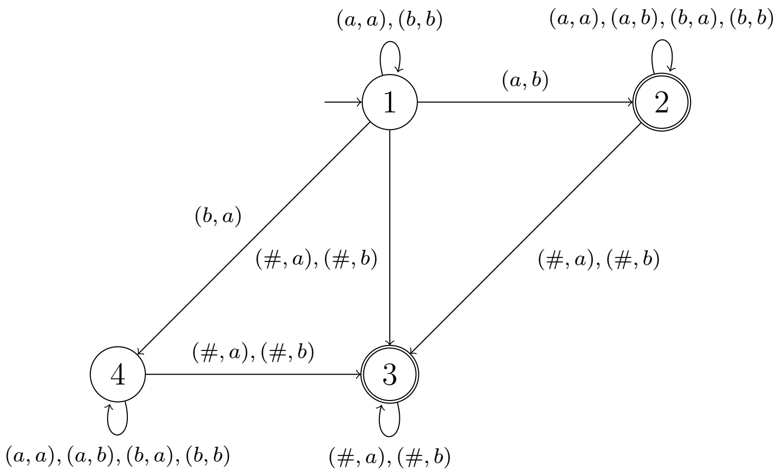
Zeigen Sie, dass die Relationen $<_{\mathsf{lex}}$ und $<_{\mathsf{llex}}$ synchron-rational sind.

Lösung
Ein synchroner 2-Bandautomat für die *lexikographische Ordnung* $<_{\mathsf{lex}}$:



Im Zustand 1 befindet man sich solange beide Wörter gleich sind (daher wird nicht akzeptiert). In Zustand 3 wechselt man, falls das erste Wort endet während des zweite noch weiter geht, d.h. das erste Wort ist in diesem Fall ein echter Präfix vom zweiten Wort (daher wird akzeptiert). In den Zustand 3 wechselt man aus dem Zustand 1, falls (a, b) gelesen wird und anschließend bleibt man im Zustand 2 egal was noch folgt, d.h. in diesem Fall hat das erste Wort die Gestalt xay und das zweite Wort xbz für $x, y, z \in \Sigma^*$ (daher wird akzeptiert).
<u>Beachte</u>: Wörter, die nicht aus $\{w_1 \otimes w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*\}$ sind, werden ignoriert.

Ein synchroner 2-Bandautomat für die *längen-lexikographische Ordnung* $<_{\mathsf{llex}}$:



Im Zustand 1 befindet man sich solange beide Wörter gleich sind (daher wird nicht akzeptiert). In Zustand 3 wechselt man, falls das erste Wort endet während des zweite noch weiter geht, d.h. das erste Wort ist in diesem Fall ein echter Präfix vom zweiten Wort (daher wird akzeptiert). In den Zustand 3 wechselt man aus dem Zustand 1, falls (a, b) gelesen wird und anschließend bleibt man im Zustand 2 solange beide Wörter noch weiter gehen, d.h. in diesem Fall sind beide Wörter gleich lang und das erste Wort hat die Gestalt xay und das zweite Wort hat die Gestalt xbz für $x, y, z \in \Sigma^*$ (daher wird akzeptiert). Vom Zustand 2 wechselt man wiederum in den Zustand 3, falls das erste Wort endet während des zweite noch weiter geht (daher wird akzeptiert). In den Zustand 4 wechselt man aus dem Zustand 1, falls (b, a) gelesen wird und anschließend bleibt man im Zustand 4 solange beide Wörter noch weiter gehen, d.h. in diesem Fall sind beide Wörter gleich lang aber das zweite Wort hat die Gestalt xay und das erste Wort hat die Gestalt xbz für $x, y, z \in \Sigma^*$ (daher wird nicht akzeptiert). In den Zustand 3 wechselt man vom Zustand 4, falls das erste Wort endet während des zweite noch weiter geht (daher wird akzeptiert).

Aufgabe 2
Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär und $n \geq 1$. Zeigen Sie durch Konstruktion eines endlichen Automaten, dass die Sprache

$$\{w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in L\} \subseteq (\Sigma_\#^n)^*$$

auch regulär ist.

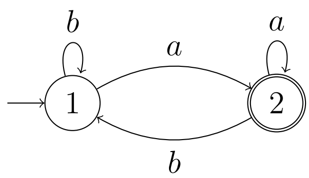
Lösung
Die folgende Konstruktion ist eine Erweiterung des Kreuzproduktautomaten aus der Vorlesung Grundlagen der theoretischen Informatik. Sei M ein DFA für L mit Zustandsmenge Z und Übergangsfunktion $\delta : Z \times \Sigma \to Z$. Wir konstruieren einen endlichen Automaten M' für $\{w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in L\}$ mit Zustandsmenge Z^n und Übergangsfunktion $\gamma : Z^n \times \Sigma_\#^n \to Z^n$. Das Prinzip ist ganz einfach: Der Automat M' simuliert parallel n Kopien des ursprünglichen Automaten M und daher ist jeder Zustand in M' ein n-Tupel

der Zustände des Automaten M. Falls in einer Komponente das Wort endet und somit das Symbol # folgt, verbleiben wir an dieser Komponente einfach im gleichen Zustand. Formal gilt dementsprechend

$$\gamma((z_1, \dots, z_n), (a_1, \dots, a_n)) = (q_1, \dots, q_n),$$

wobei $q_i = \delta(z_i, a_i)$ falls $a_i \in \Sigma$ und $q_i = z_i$ falls $a_i = \#$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Abschließend ist $(z_0, \dots, z_0)$ der Startzustand von M', wobei z_0 der Startzustand von M ist, und F^n ist die Endzustandsmenge von M', wobei F die Endzustandmenge von M ist.

Sei beispielsweise M der folgende Automat für $L = L((a|b)^*a)$:



Dann sieht für $n = 2$ der Automat M' wie folgt aus: