Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Logik II
SS 2020

# Übungsblatt 5

**Aufgabe 1**
Beweisen oder widerlegen Sie!

(a) $(\mathbb{N}, \leq)$ ist automatisch präsentierbar.

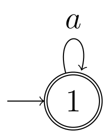
(b) Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ (einstellige Relation), dann ist $(\mathbb{N}, M)$ automatisch präsentierbar.

(c) Wenn $(\mathbb{N}, R_1)$ und $(\mathbb{N}, R_2)$ automatisch präsentierbar sind, dann ist auch $(\mathbb{N}, R_1, R_2)$ automatisch präsentierbar.

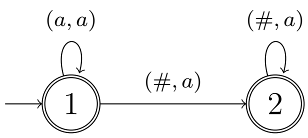
Hinweis: Wie viele automatisch präsentierbare Strukturen gibt es insgesamt? Wie viele nicht isomorphe Strukturen $(\mathbb{N}, \leq, M)$ für $M \subseteq \mathbb{N}$ gibt es?

**Lösung**

(a) Sei $f\colon \mathbb{N} \to \{a\}^*$ mit $f(i) = a^i$. Sei $(\{a\}, \leq_a)$ mit $a^i \leq_a a^j$ genau dann, wenn $i \leq j$. Dann sind $(\mathbb{N}, \leq)$ und $(\{a\}^*, \leq_a)$ und $f$ ist der dazugehörige Isomorphismus, denn $i \leq j$ genau dann, wenn $f(i) = a^i \leq a^j = f(j)$. Außerdem ist $f$ bijektiv. Abschließend ist $(\{a\}^*, \leq_a)$ automatisch ist, weil




ein endlicher Automat für $\{a\}^*$ ist und




ein 2-Bandautomat für $\leq_a$ ist.

(b) Wenn $M$ oder $\mathbb{N} \setminus M$ endlich ist, dann sei $(\{a\}^*, P)$ mit $P = \{a^i \in \{a\}^* \mid i \in M\}$ und $f(i) = a^i$. Es gilt, dass $(\{a\}^*, P)$ und $(\mathbb{N}, M)$ isomorph sind und $f$ ist der dazugehörige Isomorphismus. Der Automat für $\{a\}^*$ ist in (a) abgebildet. Falls $M$ endlich ist, so ist auch $P$ endlich und endliche Mengen von Wörtern sind immer regulär und werden damit von einem endlichen Automaten erkannt (beachten Sie dass $P$ eine einstellige Relation ist und ein 1-Bandautomat ist ein normaler endlicher Automat). Falls $\mathbb{N} \setminus M$ endlich ist, so ist das Komplement von $P$ endlich und damit regulär. Da reguläre Sprachen unter Komplementbildung abgeschlossen sind, ist auch $P$ regulär und somit gibt es einen endlichen Automaten für $P$. Somit ist $(\{a\}^*, P)$ in diesem Fall automatisch.

Wenn $M$ und $\mathbb{N}\setminus M$ unendlich sind, dann sei $M = \{a_1, a_2, \dots\}$ und $\mathbb{N}\setminus M = \{b_1, b_2, \dots\}$ (beachten Sie dass $M$ und $\mathbb{N} \setminus M$ abzählbar unendlich sind, weil beide Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind). Wir definieren $(\{a\}^* \cup \{b\}^*, P)$ mit $P = \{a\}^*$. und $f\colon \mathbb{N} \to \{a\}^* \cup \{b\}^*$ mit

$$f(i) = \begin{cases} a^j & \text{falls } i \in M, a_j = i, \\ b^j & \text{falls } i \notin M, b_j = i. \end{cases}$$

Dann ist $f$ ein Isomorphismus, weil $f$ bijektiv ist und $f(i) \in P$ genau dann wenn $i \in M$. Außerdem ist $(\{a\}^* \cup \{b\}^*, P)$ automatisch, da


ein endlicher Automat für $\{a\}^* \cup \{b\}^*$ ist und außerdem $P = \{a\}^*$ von dem endlichen Automaten aus (a) erkannt wird.

(c) Wir können jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\leq$ (und $=$) charakterisieren: Seien $a$ und $b$ freie Variablen. Sei $a < b$ eine Abkürzung für $a \leq b \wedge \neg(a = b)$. Wir definieren folgende Formeln

$$\begin{aligned} s(a, b) &= \neg\exists z(a < z \wedge z < b), \\ 0(a) &= \neg\exists z\ z < a. \end{aligned}$$

Die Formel $s(a, b)$ sagt aus, dass es zwischen $a$ und $b$ keine weite natürliche Zahl gibt. Die Formel $0(a)$ beschreibt die 0, da diese die einzige natürliche Zahl ist, so dass keine kleinere natürliche Zahl existiert. Sei außerdem $s^0(a) = 0(a)$ und für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei

$$s^{i+1}(a) = \exists x_i(s^i(x_i) \wedge s(x_i, a)).$$

Somit beschreibt $s^n(a)$, dass die freie Variable $a$ die natürliche Zahl $n$ sein muss. Das bedeutet nun aber, dass man zwei verschiede Teilmengen der natürlichen Zahlen unterscheiden kann, da es immer ein Element $n$ geben muss, welches nur in einer der beiden Teilmengen liegt und $\forall x(s^n(x) \to M(x))$ dementsprechend nur einer der beiden Strukturen gilt. Somit sind $(\mathbb{N}, \leq, M)$ und $(\mathbb{N}, \leq, M')$ nicht isomorph für $M' \neq M$. Um die Beweisführung zu beenden, muss man sich noch zwei Dinge verdeutlichen: Erstens, es gibt überabzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{N}$ (Satz von Cantor). Dementgegen stehen aber nur abzählbar viele automatische Strukturen mit 2 zweistelligen Relationen, da diese Strukturen durch einen endliche Automaten und zwei 2-Bandautomaten charakterisiert werden. Außerdem kann man endliche Automaten und 2-Bandautomaten durchnummerieren (betrachten Sie eine Kodierung[1] für endliche Automaten / 2-Bandautomaten über einem endlichen Alphabet und nehmen Sie dann zum Beispiel die lexikographische Sortierung) und das Kreuzprodukt dieser abzählbaren Mengen ist auch wieder abzählbar. Folglich gibt es mehr nicht-isomorphe Strukturen $(\mathbb{N}, \leq, M)$ mit $M \subseteq \mathbb{N}$ als es automatische Strukturen mit 2 zweistelligen Relationen gibt, womit gezeigt ist dass $(\mathbb{N}, \leq, M)$ im allgemeinen nicht automatisch präsentierbar ist.

**Alternative Argumentation**

Betrachten Sie eine unentscheidbare Teilmenge $M$ der natürlichen Zahlen. Wäre die Struktur $(\mathbb{N}, \leq, M)$ automatisch präsentierbar, so wäre $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, \leq, M)$ nach dem Satz von Khoussainov/Nerode entscheidbar. Man könnte nun für $n \in \mathbb{N}$ testen, ob $n \in M$ gilt, indem man testet, ob $\forall x(s^n(x) \to M(x)) \in \mathrm{Th}(\mathbb{N}, \leq, M)$. Da $M$ aber unentscheidbar ist, ist dies ein Widerspruch. Also kann $(\mathbb{N}, \leq, M)$ nicht automatisch sein.

**Aufgabe 2**
Gegeben seien zwei abzählbare lineare Ordnungen ohne kleinstes und ohne größtes Element. Sind die Ordnungen isomorph?

**Lösung**
$(\mathbb{Z}, \leq)$ und $(\mathbb{Q}, \leq)$ sind abzählbare lineare Ordnungen ohne kleinstes und ohne größtes Element, aber nicht isomorph. Eine Eigenschaft, die beide Ordnungen unterscheidet, ist beispielsweise, dass $(\mathbb{Q}, \leq)$ dicht ist, aber $(\mathbb{Z}, \leq)$ nicht.
Diese Eigenschaft kann durch die Formel $\forall x \forall y \exists z(x < z \wedge z < y)$ ausgedrückt werden.

[1] Im Skript von Grundlagen der theoretischen Informatik finden Sie eine Kodierung von Turing Maschinen, die sogar mächtiger sind als endliche Automaten und 2-Bandautomaten.