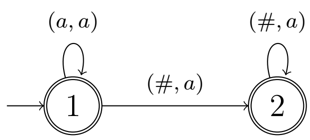
Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 7

Aufgabe 1
Überprüfen Sie, ob $(\mathbb{N}, \leq) \models \exists x \forall y (x \leq y)$ gilt, indem Sie den Satz von Khoussainov und Nerode verwenden.

Lösung
Auf Übungsblatt 5, Aufgabe 1. a) hatten wir gezeigt, dass $(\mathbb{N}, \leq)$ isomorph zu der folgenden, automatischen Struktur ist: $(\{a\}^*, \leq_a)$ mit $a^i \leq_a a^j$ genau dann, wenn $i \leq j$. Dabei ist



ein 2-Bandautomat für $\leq_a$.

Als erstes wandeln wir die Formel $\exists x \forall y (x \leq_a y)$ so um, dass kein $\forall$-Quantor vorkommt, da dieser im Beweis zum Satz von Khoussainov und Nerode nicht vorkommt und mit Hilfe der Negation und des $\exists$-Quantors ausgedrückt werden kann. Es gilt

$$\exists x \forall y (x \leq_a y) \equiv \exists x \neg \exists y \neg (x \leq_a y).$$

Sei nun $F = \exists x \neg \exists y \neg (x \leq_a y)$. Wir beginnen mit der Teilformel $F_1 = x \leq_a y$, welche im Fall 1 (Folie 67) aus dem Beweis zum Satz von Khoussainov und Nerode behandelt wird. Das bedeutet, dass wir einen synchronen 2-Bandautomen B_{F_1} konstruieren, so dass

$$K(B_{F_1}) = \{(w_1, w_2) \in \{a\}^* \times \{a\}^* \mid w_1 \leq_a w_2\}$$

In diesem Fall sind wir bereits fertig, da der oben gezeichnete 2-Bandautomat genau diese Sprache erkennt. Beachten Sie, dass hier nichts zu tun ist, weil alle Variablen von F bereits in F_1 frei vorkommen und wir die Reihenfolge der Variablen so annehmen, wie Sie auch in F_1 auftritt - daher ist der Homomorphismus aus Fall 1 auf Folie 67 die Identitätsfunktion.

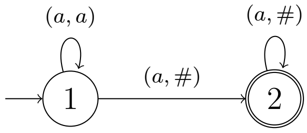
Als nächstes kommt die Teilformel $F_2 = \neg F_1 = \neg (x \leq_a y)$. Entsprechend dem Fall 3 (Folie 68) suchen wir einen 2-Bandautomaten B_{F_2} mit

$$L(B_{F_2}) = \{w_1 \otimes w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a\}^*\} \setminus L(B_{F_1}).$$

Entsprechend suchen wir einen 2-Bandautomaten B_{F_2}, so dass

$$K(B_{F_2}) = \{(a^n, a^m) \mid n > m\}$$

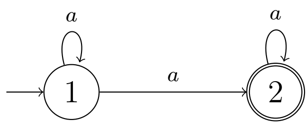
gilt. Dies realisiert der folgende Automat:



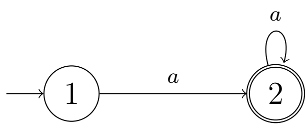
Als nächstes kommt die Teilformel $F_3 = \exists y F_2 = \exists y \neg(x \leq_a y)$. Diese Situation entspricht Fall 5 (Folie 69). Sei f so, dass $f(w_1 \otimes w_2) = w_1$ (siehe Folie 69). Wir suchen einen Automaten B_{F_3} mit

$$L(B_{F_3}) = f(L(B_{F_2})).$$

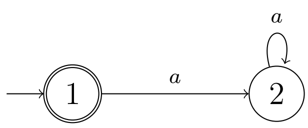
Das bedeutet, dass die zweite Komponente wird einfach ignoriert werden kann:



Beachten Sie, dass dieser nicht-deterministische Automat die gleiche Sprache akzeptiert wie der folgende deterministische Automat:



Als nächstes betrachten wir die Teilformel $F_4 = \neg F_3 = \neg\exists y \neg(x \leq_a y)$, die wiederum Fall 3 (Folie 68) entspricht. Es ist leicht zu sehen, dass das Komplement von $L(B_{F_3})$ nur das leere Wort ε enthält. Von daher ist B_{F_4} der folgende Automat, den man auch erhält in dem man die Endzustände und Nicht-Endzustände im zuletzt dargestellten deterministischen Automat vertauscht:



Die Formel F hat die gewünschte Form $F = \exists x F_4$ (siehe Folie 70). Nun gilt $(\{a\}^*, \leq_a) \models F$ genau dann wenn $L(B_{F_4}) \neq \emptyset$. Wie wir bereits gesehen haben ist $L(B_{F_4}) = \{\varepsilon\}$ und somit ist $F \in \mathrm{Th}(\mathbb{N}, \leq)$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ entscheidbar ist.

Lösung
Man kann $\mathrm{Th}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit Hilfe von $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot)$ entscheiden:
Dazu wandeln wir eine Formel F, für die wir prüfen wollen ob $F \in \mathrm{Th}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ gilt, in eine Formel F' um und prüfen stattdessen $F' \in \mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Es gilt dann $F \in \mathrm{Th}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ genau dann wenn $F' \in \mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
Die einfache Idee dahinter ist, dass wir eine komplexe Zahl eindeutig durch zwei reelle Zahlen beschreiben können, nämlich den Realteil un den Imaginärteil der komplexen Zahl. Dementsprechend ersetzen wir jede Variable x in F durch zwei neue Variablen x_1, x_2 in F', wobei x_1 den Realteil und x_2 den Imaginärteil von x repräsentiert. Entsprechend übersetzt man Teilformeln der Form $\exists x G$ zu $\exists x_1 \exists x_2 G$ und $\forall x G$ zu $\forall x_1 \forall x_2 G$. Die Rechenregeln ergeben sich entsprechend: Man übersetzt $x + y = z$ zu

$$(x_1 + y_1 = z_1) \wedge (x_2 + y_2 = z_2)$$

und $x \cdot y = z$ zu

$$(x_1 y_1 - x_2 y_2 = z_1) \wedge (x_2 y_1 + x_1 y_2 = z_2).$$

Diese Fälle genügen, da $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot)_{\mathrm{Rel}}$ entscheidbar ist genau dann, wenn $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot)$ entscheidbar ist, und ebenso $\mathrm{Th}(\mathbb{C}, +, \cdot)_{\mathrm{Rel}}$ entscheidbar ist genau dann, wenn $\mathrm{Th}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ entscheidbar ist.