Übungsblatt 8

Aufgabe 1
Sei $h^*\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Monoid-Homomorphismus.

(a) Sei B ein ε-NDEA über Γ. Geben Sie ein Konstruktionsverfahren an, das zu B einen ε-NDEA A liefert mit

$$L(A) = \{v \in \Sigma^* \mid h^*(v) \in L(B)\}.$$

Lösung
Die Konstruktion ist analog zu der Konstruktion auf Folie 64/65 im Skript. Es gilt nur zu beachten, dass der Weg der mittels $h^*(a)$ im Automaten B vom Zustand p zum Zustand q führt, nun auch ε-Übergänge enthalten kann.

(b) Sei A ein ε-NDEA über Σ. Geben Sie ein Konstruktionsverfahren an, das zu A einen ε-NDEA B liefert mit

$$L(B) = h^*(L(A)).$$

Lösung
Die Konstruktion ist analog zu der Konstruktion auf Folie 62/63 im Skript. Zusätzlich werden ε-Übergänge $p \xrightarrow{\varepsilon} q$ von A auch in B genauso übernommen.

Aufgabe 2
Sei $\mathcal{A} = (A, R)$ eine automatische Struktur (R ist eine r-stellige Relation) und $F(x, y)$ eine prädikatenlogische Formel mit freien Variablen x und y, so dass

$$\equiv_F \; = \; \{(a, b) \in A \times A \mid \mathcal{A}_{[x/a,\, y/b]} \models F(x, y)\}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Der Quotient $\mathcal{A}/F = (B, R')$ ist wie folgt definiert:

- $B = \{[a]_{\equiv_F} \mid a \in A\}$
- $R' = \{([a_1]_{\equiv_F}, \dots, [a_r]_{\equiv_F}) \mid \exists (a'_1, \dots, a'_r) \in R \text{ mit } \forall i : a_i \equiv_F a'_i\}$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}/F$ wieder automatisch ist.

Lösung
Für eine Struktur $\mathcal{A} = (A, R_1, \dots, R_k)$ und eine Äquivalenzrelation $E \subseteq A^2$ schreiben wir entsprechend $\mathcal{A}/E = (A/E, R_1/E, \dots, R_k/E)$ für die Quotientstruktur mit

- $A/E = \{[a]_E \mid a \in A\}$,

- $R_i/E = \{([a_1]_E, \ldots, [a_r]_E) \mid \exists (a'_1, \ldots, a'_r) \in R_i, \forall j \in \{1, \ldots, r\} \colon (a_j, a'_j) \in E\}$, wobei $R_i \subseteq A^r$ und $1 \leq i \leq k$.

Lemma 1
Sei $\mathcal{A} = (A, R_1, \ldots, R_k)$ eine automatische Struktur und $E \subseteq A^2$ eine in $\mathcal{A}$ definierbare Äquivalenzrelation. Dann ist $\mathcal{A}/E$ automatisch präsentierbar.

Beweis. Wir betrachten folgende Darstellung der Äquivalenzklassen:

$$A' = \{x \in A \mid \forall y (y <_{\text{llex}} x \wedge y \in A \rightarrow (x, y) \notin E)\} \subseteq A.$$

Da E definierbar in $\mathcal{A}$ ist, ist auch A' definierbar in $\mathcal{A}$ (den Automaten für die längen-lexikographische Ordnung finden Sie im Übungsblatt 4). Da $\mathcal{A}$ außerdem automatisch ist, liefert der Satz von Khoussainov/Nerode einen Automaten, der A' erkennt, d.h. A' ist auch synchron-rational. Wir definieren nun die Struktur $\mathcal{A}' = (A', R'_1, \ldots, R'_k)$, wobei $R'_i = R_i \cap (A')^r$ für $R_i \subseteq A^r$, $1 \leq i \leq k$. Jede Relation R'_i ($1 \leq i \leq k$) ist synchron-rational, da R_i und A' synchron-rational sind, und synchron-rationale Mengen unter Produktbildung und Schnitt abgeschlossen sind. $\mathcal{A}/E$ und $\mathcal{A}'$ sind isomorph, also ist $\mathcal{A}/E$ automatisch präsentierbar. $\square$

Die zu beweisende Aussage folgt direkt, da $\equiv_F$ mittels $\mathcal{A}$ definierbar ist.