Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Logik II
SS 2020

Übungsblatt 9

Aufgabe 1
Seien $f, g \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + x^3 - x - 1, \\ g(x) &= 4x^3 + 3x^2 - 1. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Sturmfolge $[f, g]$.

Lösung
Euklidischer Algorithmus für f und g.

1. Schritt:

$$\begin{array}{l} \big(x^4 + x^3 - x - 1 \big) \,/\, \big(4x^3 + 3x^2 - 1\big) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} + \dfrac{-\frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{15}{16}}{4x^3 + 3x^2 - 1} \\ \underline{-x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{4}x} \\ \qquad \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - 1 \\ \qquad \underline{-\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16}} \\ \qquad\qquad -\frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{15}{16} \end{array}$$

2. Schritt:

$$\begin{array}{l} \big(4x^3 + 3x^2 - 1 \big) \,/\, \big(\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{15}{16}\big) = \frac{64}{3}x - \frac{208}{3} + \dfrac{32x + 64}{\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{15}{16}} \\ \underline{-4x^3 - 16x^2 - 20x} \\ \qquad -13x^2 - 20x - 1 \\ \qquad \underline{13x^2 + 52x + 65} \\ \qquad\qquad 32x + 64 \end{array}$$

3. Schritt:

$$\begin{array}{l} \big(\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{15}{16} \big) \,/\, \big(-32x - 64\big) = -\frac{3}{512}x - \frac{3}{256} + \dfrac{\frac{3}{16}}{-32x - 64} \\ \underline{-\frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{8}x} \\ \qquad \frac{3}{8}x + \frac{15}{16} \\ \qquad \underline{-\frac{3}{8}x - \frac{3}{4}} \\ \qquad\qquad \frac{3}{16} \end{array}$$

4. Schritt:

$$\begin{array}{l} \big(-32x - 64\big) \;/\; -\tfrac{3}{16} = \tfrac{512}{3}x + \tfrac{1024}{3} \\ \underline{\;\;32x\;\;} \\ \qquad -64 \\ \qquad \underline{\;\;64} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Sturmfolge $[f, g]$ besteht aus f, g und den negativen Resten des Euklidischen Algorithmus für f und g:

$$[f, g] = \left(f, g, \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{15}{16}, -32x - 64, -\frac{3}{16}\right)$$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von $f(x) = x^4 - x^2 - 1$ im Intervall $(-2, 2)$ mit dem Satz von Sturm und Tarski.

Lösung
Betrachte f und die Ableitung f':

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - x^2 - 1 \\ f'(x) &= 4x^3 - 2x \end{aligned}$$

Euklidischer Algorithmus für f und f'.

1. Schritt:

$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^4 \;\; - x^2 - 1\big) \;/\; \big(4x^3 - 2x\big) = \tfrac{1}{4}x + \dfrac{-\frac{1}{2}x^2 - 1}{4x^3 - 2x} \\ \underline{-x^4 + \tfrac{1}{2}x^2} \\ \qquad -\tfrac{1}{2}x^2 \end{array}$$

2. Schritt:

$$\begin{array}{l} \big(\;\; 4x^3 \;\; - 2x\big) \;/\; \big(\tfrac{1}{2}x^2 + 1\big) = 8x + \dfrac{-10x}{\frac{1}{2}x^2 + 1} \\ \underline{-4x^3 \;\; - 8x} \\ \qquad -10x \end{array}$$

3. Schritt:

$$\begin{array}{l} \big(\;\; \tfrac{1}{2}x^2 + 1\big) \;/ 10x = \tfrac{1}{20}x + \dfrac{1}{10x} \\ \underline{-\tfrac{1}{2}x^2\;\;} \end{array}$$

4. Schritt

$$\begin{array}{l} \big(-10x\big) \;/ 1 = -10x \\ \underline{\;\;10x} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Sturmfolge:

$$[f, f'] = \left(x^4 - x^2 - 1, 4x^3 - 2x, \frac{1}{2}x^2 + 1, 10x, -1\right)$$

Eingesetzt mit $a = -2$:

$$(11, -28, 3, -20, -1)$$

Eingesetzt mit $b = 2$:

$$(11, 28, 3, 20, -1)$$

Es gibt 3 Vorzeichenwechsel für a und einen für b, also erhalten wir $3 - 1 = 2$ Nullstellen von $f(x)$ im Intervall $(-2, 2)$.