Übungsblatt 11

Aufgabe 1
Betrachten Sie die Struktur $(\mathbb{N}, 0, s)$, wobei s die Nachfolgerfunktion ist ($s(n) = n + 1$). Beschreiben Sie das Induktionsaxiom mit Hilfe eines MSO-Satz!

Induktionsaxiom: Jede Teilmenge der natürlichen Zahlen, die die 0 enthält und für jedes Element in der Teilmenge auch dessen Nachfolger enthält, ist bereits die Menge aller natürlichen Zahlen.

Lösung
Siehe Induktionsaxiom der Peano-Arithmetik:

$$\forall S((0 \in S \wedge \forall x(x \in S \rightarrow s(x) \in S)) \rightarrow \forall x(x \in S))$$

Aufgabe 2
Betrachten Sie die Klasse der endlichen, gerichteten Graphen. Eine Struktur definiert nun einen Graphen, wobei die Knotenmenge das Universum ist und die zweistellige Relation E die Menge der gerichteten Kanten beschreibt. Stellen Sie MSO-Sätze für die folgenden Aussagen auf:

(a) Der Graph ist stark zusammenhängend.

(b) Der Graph ist bipartit (= der unterliegende, ungerichtete Graph ist bipartit).

(c) Der Graph ist ein Baum mit einer Wurzel.

Lösung
Formel reach für Variablen x und y:

$$\mathrm{reach}(x, y) = \forall X\big((x \in X \wedge \forall u \forall v((u \in X \wedge E(u, v)) \rightarrow v \in X)) \rightarrow y \in X\big)$$

(a) $\forall x \forall y(x \neq y \rightarrow \mathrm{reach}(x, y))$

(b) $\exists X \forall x \forall y(E(x, y) \rightarrow (x \in X \leftrightarrow y \notin X))$

(c) Zyklenfrei: $\forall x \neg \mathrm{reach}(x, x)$,
Zusammenhängend mit Wurzel: $\exists x \forall y(y \neq x \rightarrow \mathrm{reach}(x, y))$