Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 12

Aufgabe 1
Geben Sie MSO-Formeln für die folgenden regulären Sprachen an.

(a) $L_1 = L\left((a|b)^* a\right)$

(b) $L_2 = \{w \in \Sigma^+ \mid w \text{ beginnt und endet auf } b\}$

(c) $L_3 = L(b(a|b)^* b)$

(d) $L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{Die Anzahl der } a \text{ ist gerade}\}$

Lösung

(a) $\exists x(\forall u(u \leq x) \wedge P_a(x))$

(b) $\exists x(\forall u(u \leq x) \wedge P_b(x)) \wedge \exists x(\forall u(x \leq u) \wedge P_b(x))$

(c) $\exists x \exists y(x \neq y \wedge \forall u(u \leq x) \wedge P_b(x) \wedge \forall u(y \leq u) \wedge P_b(y))$

(d) Zur Vereinfachung setzen wir $\Sigma = \{a, b\}$. Der Automat $(\{a, b\}, \{1, 2\}, 1, \{1\}, \delta)$ mit

$$\begin{aligned}\delta(1, a) &= 2\\ \delta(1, b) &= 1\\ \delta(2, a) &= 1\\ \delta(2, b) &= 2\end{aligned}$$

akzeptiert L_4. Mit dem Satz von Büchi erhalten wir als Formel:

$$\begin{aligned}
&\exists X_1 \exists X_2 (X_1 \cap X_2 = \emptyset \wedge \forall x(x \in X_1 \vee x \in X_2)\\
&\wedge \exists x(\forall y(x \leq y) \wedge ((P_a(x) \wedge x \in X_2) \vee (P_b(x) \wedge x \in X_1)))\\
&\wedge \exists x(\forall y(y \leq x) \wedge x \in X_1)\\
&\wedge \forall x \forall y(y = x + 1 \ \rightarrow (x \in X_1 \wedge P_a(y) \wedge y \in X_2)\\
&\qquad\qquad \vee (x \in X_1 \wedge P_b(y) \wedge y \in X_1)\\
&\qquad\qquad \vee (x \in X_2 \wedge P_a(y) \wedge y \in X_1)\\
&\qquad\qquad \vee (x \in X_2 \wedge P_b(y) \wedge y \in X_2)))
\end{aligned}$$

Aufgabe 2
Welche Sprachen über $\Sigma = \{a, b, c\}$ werden durch die folgenden MSO-Formeln beschrieben?

(a) $\forall x \forall y (P_a(x) \wedge P_b(y) \wedge (x < y) \wedge (\forall z (x < z < y) \rightarrow \neg P_b(z)))$
$\rightarrow (\exists x_1 \exists x_2 (x < x_1 < x_2 < y) \wedge P_c(x_1) \wedge P_c(x_2))$

(b) $\exists X (\exists x \exists y (\forall u (x \leq u \leq y) \wedge x \in X \wedge y \in X) \wedge$
$\forall x \forall y (y = x + 1 \rightarrow (x \in X \leftrightarrow \neg (y \in X))))$

Lösung

(a) Zwischen einem a und dem darauffolgenden b liegen immer mindestens zwei c.

(b) Die Länge der Wörter ist ungerade.