# Übungsblatt 6

**Aufgabe 1.**
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

(a) $L_1 = \{a^n b^m \mid n < m\}$

(b) $L_2 = \{a^n b^m \mid |n - m| \leq 2\}$

**Lösung zu Aufgabe 1.**

(a) $L_1 = \{a^n b^m \mid n < m\}$ ist **nicht regulär**

**Pumping Lemma**

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^n b^{n+1} \in L_1$, $|x| = 2n + 1 \geq n$.

Betrachte alle Zerlegungen $x = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$:

Wir haben $u = a^k, v = a^l, w = a^m b^{n+1}$ $(k + l + m = n,\ l \geq 1)$.

Wir wählen den Pumpfaktor $i = 2$ und betrachten $uv^i w$:

$uv^2 w = a^k a^{2l} a^m b^{n+1} = a^{n+l} b^{n+1}$.

Da $n + l \geq n + 1$ (wegen $l \geq 1$) gilt $uv^2 w \notin L_1$. Folglich ist die Sprache $L_1$ nicht regulär.

(b) $L_2 = \{a^n b^m \mid |n - m| \leq 2\}$ ist **nicht regulär**

**Pumping Lemma**

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^{n+2} b^n \in L_2$, $|x| = 2n + 2 \geq n$.

Betrachte alle Zerlegungen $x = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$:

Wir haben $u = a^k, v = a^l, w = a^m b^n$ $(k + l + m = n + 2,\ l \geq 1)$.

Wir wählen den Pumpfaktor $i = 2$ und betrachten $uv^i w$:

$uv^2 w = a^k a^{2l} a^m b^n = a^{n+2+l} b^n$.

Da $|(n + 2 + l) - n| = |2 + l| \geq 3$ (wegen $l \geq 1$), gilt $uv^2 w \notin L_2$. Folglich ist $L_2$ nicht regulär.

**Aufgabe 2.** Sei $L = \{ab^n \mid n \geq 1\}$.

(a) Geben Sie den Minimalautomaten (bis auf Umbenennung der Zustände) an.

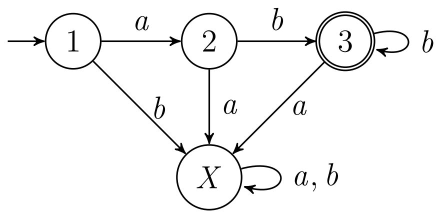
(b) Beweisen Sie, dass Ihr Minimalautomat wirklich minimal ist, indem Sie zeigen, dass der Index der Relation $R_L$ gleich der Anzahl der Zustände Ihres Automaten ist.

(c) Begründen Sie kurz, dass ein NFA, der $L$ akzeptiert, mindestens drei Zustände braucht.

(d) Geben Sie mindestens zwei verschiedene NFAs (nicht durch Umbenennung der Zustände) mit drei Zuständen an, die $L$ akzeptieren.

**Lösung zu Aufgabe 2.** (a)

$M$:




(b) Die Myhill-Nerode Äquivalenzklassen sind:

- $[\varepsilon] = \{\varepsilon\}$ (Zustand 1)
- $[a] = \{a\}$ (Zustand 2)
- $[ab] = L = \{ab^n \mid n \geq 1\}$ (Zustand 3)
- $[b] = \{w \mid w \notin L, w \neq a, w \neq \varepsilon\}$ (Zustand X)

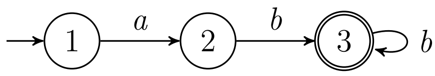
Die Klassen sind unterschiedlich, da man sie jeweils trennen kann:

- $\neg(\varepsilon\ R_L\ a)$: $\varepsilon \cdot b = b \notin L$, während $a \cdot b = ab \in L$
- $\neg(\varepsilon\ R_L\ ab)$: $\varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon \notin L$, während $ab \cdot \varepsilon = ab \in L$
- $\neg(\varepsilon\ R_L\ b)$: $\varepsilon \cdot ab = ab \in L$, während $b \cdot ab = bab \notin L$
- $\neg(a\ R_L\ ab)$: $a \cdot \varepsilon = a \notin L$, während $ab \cdot \varepsilon = ab \in L$
- $\neg(a\ R_L\ b)$: $a \cdot b = ab \in L$, während $b \cdot b = bb \notin L$
- $\neg(ab\ R_L\ b)$: $ab \cdot \varepsilon = ab \in L$, während $b \cdot \varepsilon = b \notin L$

Es gilt $\mathrm{index}(R_L) = 4 =$ Anzahl der Zustände.

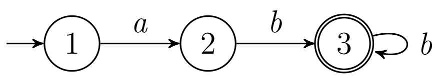
Damit ist der Automat aus Aufgabenteil (a) minimal.

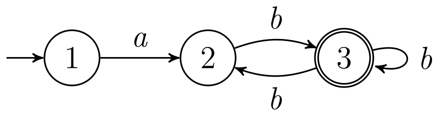
(c)

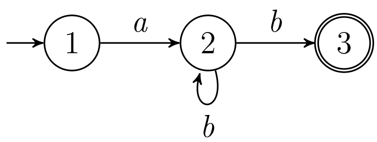
$M_1$: 


Die drei Zustände werden benötigt, da die Wörter $\varepsilon$, $a$ und $ab$ in unterschiedliche Zuständen führen müssen. Genauer gesagt: Es muss einen nicht-akzeptierenden Startzustand geben (wird durch das Lesen von $\varepsilon$ erreicht), so dass man von dort mit $ab$ in einen Endzustand gelangt. Dieser Zustand darf aber nicht durch das Lesen von $a$ oder $ab$ erreicht werden, da ansonsten fälschlicherweise $aab$ bzw. $abab$ akzeptiert würde. Außerdem muss es einen weiteren nicht-akzeptierenden Zustand geben, den man durch das Lesen von $a$ erreicht. Dass dieser nicht der eben erwähnte Startzustand sein kann wurde bereits argumentiert. Abschließend muss es auch noch einen Endzustand geben, der z.B. durch das Lesen von $ab$ erreicht wird.

(d) Verschiedene NFAs für $L$:

$M_1$: 


$M_2$: 


$M_3$: 

**Aufgabe 3.** Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Gegeben ist der DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, 1, E)$ mit $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E = \{7\}$ und

| $\delta$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 |
| 2 | 7 | 4 |
| 3 | 5 | 3 |
| 4 | 5 | 4 |
| 5 | 7 | 1 |
| 6 | 7 | 3 |
| 7 | 7 | 7 |

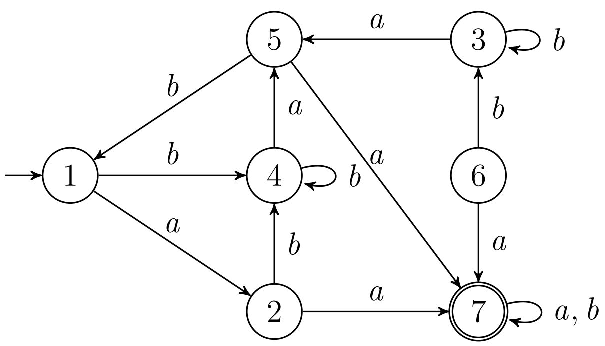
(a) Zeichnen Sie das Automatendiagramm von $M$.

(b) Verwenden Sie den "Algorithmus Minimalautomat", um den Minimalautomaten für die Sprache $L(M)$ zu erhalten.

(c) Zeichnen Sie den in (b) erhaltenen Automaten.

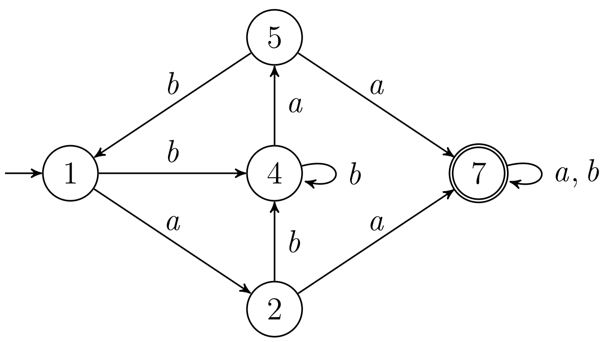
**Lösung zu Aufgabe 3.** (a)

$M$:




(b) Die Zustände 3 und 6 sind vom Startzustand aus nicht erreichbar und können gestrichen werden.

$M$:



Nun wenden wir den „Algorithmus Minimalautomat“ von Folie 165 des Skripts an.

Anmerkung: Wir arbeiten mit **Mengen** von zwei Zuständen, nicht mit Tupeln, es gilt also $\{x, y\} = \{y, x\}$.

**Schritt 0**

Bilden aller Zustandspaare $\{z, z'\}$ mit $z \neq z'$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 7 | | | | |
| | 1 | 2 | 4 | 5 |

**Schritt 1**

Markiere alle Paare $\{z, z'\}$ mit $z \in E$ und $z' \notin E$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 2 | 4 | 5 |

**Schritt 2**

Für jedes noch unmarkierte Paar $\{z, z'\}$ und jedes $s \in \Sigma$ teste, ob $\{\delta(z, s), \delta(z', s)\}$ bereits markiert ist. Falls ja, markiere auch $\{z, z'\}$.

Neue Markierungen:

- $\{1, 2\}$, da $\{\delta(1, a), \delta(2, a)\} = \{2, 7\}$ bereits markiert
- $\{1, 5\}$, da $\{\delta(1, a), \delta(5, a)\} = \{2, 7\}$ bereits markiert
- $\{2, 4\}$, da $\{\delta(1, a), \delta(4, a)\} = \{7, 5\}$ bereits markiert
- $\{4, 5\}$, da $\{\delta(4, a), \delta(5, a)\} = \{5, 7\}$ bereits markiert

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | | | |
| 4 | | 2 | | |
| 5 | 2 | | 2 | |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 2 | 4 | 5 |

**Schritt 3, Wiederholung**

$\{1,4\}$ und $\{2,5\}$ sind noch unmarkiert, es kommen keine weiteren Markierungen hinzu, da

- $\{\delta(1,a), \delta(4,a)\} = \{2,5\}$ nicht markiert
- $\{\delta(1,b), \delta(4,b)\} = \{4,4\}$ nicht markiert
- $\{\delta(2,a), \delta(5,a)\} = \{7,7\}$ nicht markiert
- $\{\delta(2,b), \delta(5,b)\} = \{1,4\}$ nicht markiert

Die verbleibenden unmarkierten Zustandspaare $\{1,4\}$ und $\{2,5\}$ sind jeweils erkennungsäquivalent.

<u>Beachte:</u> Diese Begründungen müssen auch in der Klausur dazugeschrieben werden!

(c)

$M$: