

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

- (a) $2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}}$
- (b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$
- (c) $\bigcup_{a \in \{1,2,3,4,5\}} \{\frac{a}{2}, 1 + \frac{a}{2}\}$
- (d) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, 2n\}$

Lösung zu Aufgabe 1.

(a) $2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}} = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Erklärung:

2^M ist die Notation für die **Potenzmenge** von M , also der Menge aller Teilmengen von M .

$2^{\{1,2,3\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ und
 $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$

$2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}}$ enthält genau die Elemente, die in der Menge $2^{\{1,2,3\}}$ enthalten sind, aber nicht in der Menge $2^{\{1,2\}}$.

(b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\} = \emptyset$

Formale Begründung: Angenommen, es existiert ein $x \in \mathbb{N}$, sodass $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$. Dann muss x für jedes $n \in \mathbb{N}$ in der Menge $\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$ enthalten sein (nach Definition der Schnittmenge). Es ist allerdings $x \notin \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq x + 1\}$, somit erhalten wir einen Widerspruch zur unserer Annahme.

Intuition:

Wir bilden den Schnitt über die folgenden Mengen:
 $\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

$$\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 1\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

$$\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 2\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

$$\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 3\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

....

$$\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\} = \{n, n+1, n+2, n+3, \dots\}$$

...

(für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge, wobei eine Menge $\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$ alle natürlichen Zahlen ab der Zahl n enthält.)

Geht man zum Beispiel davon aus, dass in $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$ die Zahl 0 enthalten ist, so müsste (nach Definition der Schnittmenge) 0 für jedes $n \in \mathbb{N}$ in der Menge $\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$ enthalten sein. Aber bereits bei der Menge $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ist dies nicht der Fall. Schaut man sich eine beliebige natürliche Zahl x an, so kann auch diese nicht in $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$ liegen, da sie z.B. in der $(x+2)$ -ten Menge ($\{x+1, x+2, x+3, x+4, \dots\}$) nicht enthalten ist.

(c)

$$\begin{aligned} & \bigcup_{a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}} \left\{ \frac{a}{2}, 1 + \frac{a}{2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{2}{2}, 1 + \frac{2}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{3}{2}, 1 + \frac{3}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{4}{2}, 1 + \frac{4}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{2}, 1 + \frac{5}{2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\} \cup \{1, 2\} \cup \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right\} \cup \{2, 3\} \cup \left\{ \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2} \right\}. \end{aligned}$$

$$(d) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, 2n\} = \mathbb{N}$$

Erklärung:

Sei $A_n := \{n, 2n\}$ und $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, 2n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Um formal die Gleichheit der Mengen zu zeigen, zeigen wir die beiden Inklusionen ($A \subseteq \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \subseteq A$).

$A \subseteq \mathbb{N}$: Jede der Mengen A_n enthält nur natürliche Zahlen ($n, 2n \in \mathbb{N}$), somit auch die Vereinigung der Mengen $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

$\mathbb{N} \subseteq A$: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $n \in A_n = \{n, 2n\}$, und somit in der Vereinigung der Mengen $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ enthalten. Da dies für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $\mathbb{N} \subseteq A$.

Aufgabe 2. Seien A, B, C Mengen.

- (a) Angenommen $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ und $B \cap C \neq \emptyset$. Gilt dann auch $A \cap B \cap C \neq \emptyset$?
- (b) Was ist mit der Rückrichtung?

Lösung zu Aufgabe 2.

- (a) Nein. Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{3, 1\} \\ A \cap B &= \{2\} \neq \emptyset, A \cap C = \{1\} \neq \emptyset, B \cap C = \{3\} \neq \emptyset \\ \text{aber : } A \cap B \cap C &= \emptyset \end{aligned}$$

- (b) Ja, denn sei

$$\begin{aligned} x \in A \cap B \cap C &\implies x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C \\ x \in A \wedge x \in B &\implies x \in A \cap B \implies A \cap B \neq \emptyset \\ x \in A \wedge x \in C &\implies x \in A \cap C \implies A \cap C \neq \emptyset \\ x \in B \wedge x \in C &\implies x \in B \cap C \implies B \cap C \neq \emptyset \end{aligned}$$

Oder in Worten:

Sei x Element der Menge $A \cap B \cap C$, so muss x auch Element der Menge A sein (nach Definition der Schnittmenge). Ebenso muss x auch Element der Menge B sein. Damit ist x aber auch Element von $A \cap B$ (wieder nach Definition der Schnittmenge), also ist $A \cap B$ nicht leer. $A \cap C \neq \emptyset$ und $B \cap C \neq \emptyset$ werden analog gezeigt.

Aufgabe 3. Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

- (a) Wenn $x \in A \cup B$, dann ist $x \in A$ und $x \in B$.
- (b) Wenn $x \in A \cap B$, dann ist $x \in A$ oder $x \in B$.
- (c) $|2^{A \times B}| = |2^A \times 2^B|$
- (d) Sei $A \subseteq B$. Dann ist $A \cap B = A$.

Lösung zu Aufgabe 3.

- (a) Falsch, z.B.: $A = \{1\}, B = \{2\}, A \cup B = \{1, 2\}$
 $2 \in A \cup B$ und $2 \in B$ aber $2 \notin A$
- (b) Wahr, $x \in A \cap B \implies x \in A \wedge x \in B$, also auch
 $x \in A \cap B \implies x \in A \vee x \in B$.
- (c) Falsch, aus der Definition von $\times$ folgt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ (wenn A, B endliche Mengen sind). Außerdem gilt $|2^A| = 2^{|A|}$.
Damit erhalten wir $|2^{A \times B}| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|}$
aber $|2^A \times 2^B| = |2^A| \cdot |2^B| = 2^{|A|} \cdot 2^{|B|} = 2^{|A|+|B|}$.
Wir finden leicht A und B mit $|A| \cdot |B| \neq |A| + |B|$, also gilt die Behauptung nicht.

Konkretes Gegenbeispiel

Sei $A = \emptyset, B = \{1\}$. Dann gilt $A \times B = \emptyset, 2^A = \{\emptyset\}$ und $2^B = \{\emptyset, \{1\}\}$.

Somit ergibt sich $2^{A \times B} = \{\emptyset\}$ und $2^A \times 2^B = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\})\}$, also $|2^{A \times B}| = 1 \neq 2 = |2^A \times 2^B|$.

- (d) Wahr. Die Gleichheit zweier Mengen M_1, M_2 können wir durch beidseitige Inklusion zeigen, d.h. wir zeigen, dass jedes Element von M_1 Element von M_2 ist und dass jedes Element von M_2 auch Element von M_1 ist (formal: $M_1 = M_2 \iff M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_1$).

Zur Erinnerung: $A \subseteq B \iff \forall x \in A : x \in B$

Richtung 1 ($A \subseteq A \cap B$):

Sei $x \in A$. Aus $x \in A$ folgt wegen $A \subseteq B$, dass auch $x \in B$. Damit gilt $x \in A \wedge x \in B$ und somit $x \in A \cap B$.

Richtung 2 ($A \cap B \subseteq A$):

Sei $x \in A \cap B$, dann gilt:

$$x \in A \cap B \implies x \in A \wedge x \in B \implies x \in A \quad \square$$

Aufgabe 4. Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

- (a) Es gibt in Σ^* genau 2^n Wörter der Länge n .
- (b) Es gibt in Σ^* genau $2^{n+1} - 1$ Wörter der Länge höchstens n .

Lösung zu Aufgabe 4. (a) Sei W_n die Menge aller Wörter der Länge n .

Induktionsanfang: Sei $n = 0$. $W_0 = \{\varepsilon\}$, also $|W_0| = 1 = 2^0$ ✓

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $|W_n| = 2^n$.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Sei w ein Wort der Länge $n + 1$. Dann gilt $w = vx$, wobei v ein Wort der Länge n ist und $x \in \{a, b\}$. (Jedes Wort der Länge $n + 1$ lässt sich eindeutig in ein Wort v der Länge n gefolgt von einem a oder b zerlegen.)

Also: $W_{n+1} = \bigcup_{v \in W_n} \{va, vb\}$, und daher $|W_{n+1}| = 2|W_n| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

(b) Sei $Q_n = \bigcup_{i=0}^n W_i$ die Menge aller Wörter der Länge höchstens n .

Seien $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k \neq m$. Dann gilt $W_k \cap W_m = \emptyset$.

Also ist $|Q_n| = \sum_{i=0}^n |W_i| = \sum_{i=0}^n 2^i$.

$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ können wir mittels vollständiger Induktion zeigen.

Induktionsanfang: Sei $n = 0$.

$$\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1 = 2^1 - 1 = 2^{n+1} - 1 \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} 2^i &= \left(\sum_{i=0}^n 2^i \right) + 2^{n+1} \stackrel{(IV)}{=} (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1. \end{aligned} \quad \square$$

Aufgabe 5. Welche Sprachen erzeugen die folgenden Grammatiken?

- (a) $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei $V = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$P = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow aA, B \rightarrow b\}$$

- (b) $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei $V = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$P = \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow SS, S \rightarrow ab\}$$

- (c) $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei $V = \{S, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$P = \{S \rightarrow aB, B \rightarrow bC, C \rightarrow Ba, C \rightarrow b\}$$

Lösung zu Aufgabe 5.

- (a) $L(G) = \emptyset$

Jede Satzform, die aus S abgeleitet werden kann, enthält mindestens ein Nichtterminal: Die einzige Produktion mit S auf der linken Seite ist $S \rightarrow AB$ und diese enthält auf der rechten Seite das Nichtterminal A . Die einzige Produktion mit A auf der linken Seite ist $A \rightarrow aA$ und diese enthält wiederum das Nichtterminal A auf der rechten Seite. Somit kann aus S (und ebenso aus A) nie ein Wort über dem Alphabet Σ abgeleitet werden.

- (b) $L(G) = \{(ab)^m \mid m \geq 0\}$

Formal sind die beiden Inklusionen $L(G) \subseteq \{(ab)^m \mid m \geq 0\}$ und $\{(ab)^m \mid m \geq 0\} \subseteq L(G)$ zu zeigen:

$\{(ab)^m \mid m \geq 0\} \subseteq L(G)$: Sei $w \in \{(ab)^m \mid m \geq 0\}$. Dann ist $w = (ab)^k$ für ein $k \geq 0$. Wir zeigen $w \in L(G)$, indem wir eine Ableitung für w aus S angeben: Wenn $k = 0$, wenden wir die Produktion $S \rightarrow \varepsilon$ an, um w abzuleiten. Wenn $k = 1$, leiten wir $w = ab$ aus S in einem Schritt durch die Produktion $S \rightarrow ab$ an. Ist $k > 1$ können wir in $k - 1$ Schritten mit der Produktion $S \rightarrow SS$ die Satzform S^k aus S ableiten. Weiterhin können wir aus der Satzform S^k über die Produktion $S \rightarrow ab$ in weiteren k Schritten $w = (ab)^k$ ableiten. Damit gilt also $w \in L(G)$.

$L(G) \subseteq \{(ab)^m \mid m \geq 0\}$: Jedes Wort $w \in \Sigma^*$, das aus S abgeleitet wird, ist eine Konkatenation der Terminalsymbole auf den rechten Seiten der Produktionen für S , d.h. aus den Wörtern ε und ab : Damit folgt $w \in \{(ab)^m \mid m \geq 0\}$ für jedes Wort w , das aus S abgeleitet wird.

(c) $L(G) = \{ab^{n+2}a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Zum Verständnis kann es hilfreich sein die Grammatik umzuschreiben zu $P = \{S \rightarrow abC, C \rightarrow bCa, C \rightarrow b\}$ (dazu wird das B überall durch seine rechte Seite ersetzt).

Intuitiv: Aus dem Nichtterminal C werden Wörter $w \in \{b^n ba^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ abgeleitet, da man durch (wiederholtes) Anwenden der Produktion $C \rightarrow bCa$ gleich viele b 's und a 's erzeugt (jeweils zu Beginn und am Ende der Satzform) und in einem weiteren Schritt durch Anwenden der Produktion $C \rightarrow b$ das mittlere b erhält. Aus der einzigen Regel für S ($S \rightarrow abC$) erhalten wir dann

$$L(G) = \{abb^n ba^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{ab^{n+2}a^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(Um formal die Gleichheit der Mengen zu zeigen, sind auch hier eigentlich wieder die beiden Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$ zu zeigen).

Aufgabe 6. Otto steht im Treppenhaus des Hölderlingebäudes und läuft die Treppen hoch und runter. Jedes Mal, wenn er eine Stufe hinaufsteigt, notiert er sich ein $\uparrow$. Jedes Mal, wenn er eine Stufe hinuntersteigt, notiert er sich ein $\downarrow$. Geben Sie eine Grammatik an, die die Sprache aller Wörter über $\{\uparrow, \downarrow\}$ erzeugt, so dass Otto am Ende wieder an der Anfangsposition steht.

Lösung zu Aufgabe 6.

Damit Otto am Ende wieder an der Anfangsposition steht, muss die Anzahl der $\uparrow$ im Wort gleich der Anzahl der $\downarrow$ sein. Wir gehen davon aus, dass Otto beliebig viele Stockwerke hoch und runter gehen kann.

Eine mögliche Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit unendlich vielen Stockwerken ist definiert durch

- $V = \{S\}$
- $\Sigma = \{\uparrow, \downarrow\}$
- $P = \{S \rightarrow \uparrow S \downarrow S, S \rightarrow \downarrow S \uparrow S, S \rightarrow \varepsilon\}$.