

**Prüfung zur Vorlesung  
„Grundlagen der Theoretischen Informatik“  
SS 2021 / 16. August 2021**

Vorname: \_\_\_\_\_

Nachname: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Aufgabe	Punktzahl	Erreicht
1	12	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
6	6	
7	6	
8	6	
9	3	
10	3	
11	0	
$\Sigma$	60	

## Hinweise

- Prüfungsdauer: **120 Minuten**. Die Prüfung findet als Take-Home-Exam von **15 bis 17 Uhr** statt.
- Die Lösungen müssen mit der Hand geschrieben werden. Schreiben Sie bitte deutlich. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Es ist nicht notwendig, die Klausur auszudrucken: Sie können Ihre Lösungen gerne auf eigene (einfarbig weiße, linierte oder karierte) DIN-A4-Blätter schreiben.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Aufgabennummer.
- Die fertigen Lösungen scannen oder fotografieren Sie. Achten Sie auf gute Lesbarkeit. Wir empfehlen die kostenlose App Adobe Scan zum Einscannen der Seiten. Alternativ können Sie die Lösungen auch direkt auf einem Tablet mit der Hand schreiben und uns das PDF schicken.
- Ihre Lösungen müssen bis spätestens 17:20 Uhr am 16. August 2021 bei einer der folgenden E-Mail-Adressen ankommen:
  - (a) michael.figelius@uni-siegen.de (Nachnamen mit A–F)
  - (b) reh@eti.uni-siegen.de (Nachnamen mit G–L)
  - (c) seelbach@eti.uni-siegen.de (Nachnamen mit M–S)
  - (d) andreas.rosowski@uni-siegen.de (Nachnamen mit T–Z)
- Zusammen mit Ihren Lösungen schicken Sie eine ausgefüllte und unterschriebene Erklärung über die eigenständige Erbringung der Prüfungsleistung, siehe [https://www.uni-siegen.de/zuv/dezernat3/abteilung\\_3\\_2/eigenstaendigkeitserklaerung\\_homepage\\_ab\\_18.02.2021.pdf](https://www.uni-siegen.de/zuv/dezernat3/abteilung_3_2/eigenstaendigkeitserklaerung_homepage_ab_18.02.2021.pdf).
- Alle Hilfsmittel sind erlaubt bis auf die Hilfestellung durch eine andere Person.

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 1.** (12 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden sechs Fragen. Für jede Teilaufgabe gibt es zwei Punkte, wenn Sie die Aufgabe vollständig und korrekt beantwortet haben.

- (1) Sei  $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ . Geben Sie Sprachen  $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$  an, sodass  $L_1$  entscheidbar ist,  $L_2$  nicht regulär ist,  $L_3$  nicht kontextfrei ist, und  $L_1 = L_2 \cup L_3$  gilt.

- (2) Geben Sie eine Funktion  $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  an, die Turing-berechenbar, aber nicht primitiv rekursiv ist.

- (3) Sei  $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$  mit den Produktionen  $S \rightarrow aA$  und  $A \rightarrow AA \mid a$  eine Grammatik. Geben Sie eine Grammatik  $G'$  mit  $L(G) = L(G')$  in Chomsky-Normalform an.

Name:

Matrikelnummer:

- (4) Sei  $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  und sei  $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } \alpha\alpha\}$ . Geben Sie die Myhill-Nerode Äquivalenzklassen bzgl.  $L$  an. Wie viele Zustände hat ein minimaler DFA, der  $L$  erkennt?

- (5) Gibt es eine Grammatik  $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ , die die Produktion  $S \rightarrow aS$  enthält und die leere Sprache erzeugt? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (6) Ist das folgende Problem unentscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Gegeben:** Eine natürliche Zahl  $n$ .

**Frage:** Ist  $n$  kein Folgenglied der Fibonacci Folge?

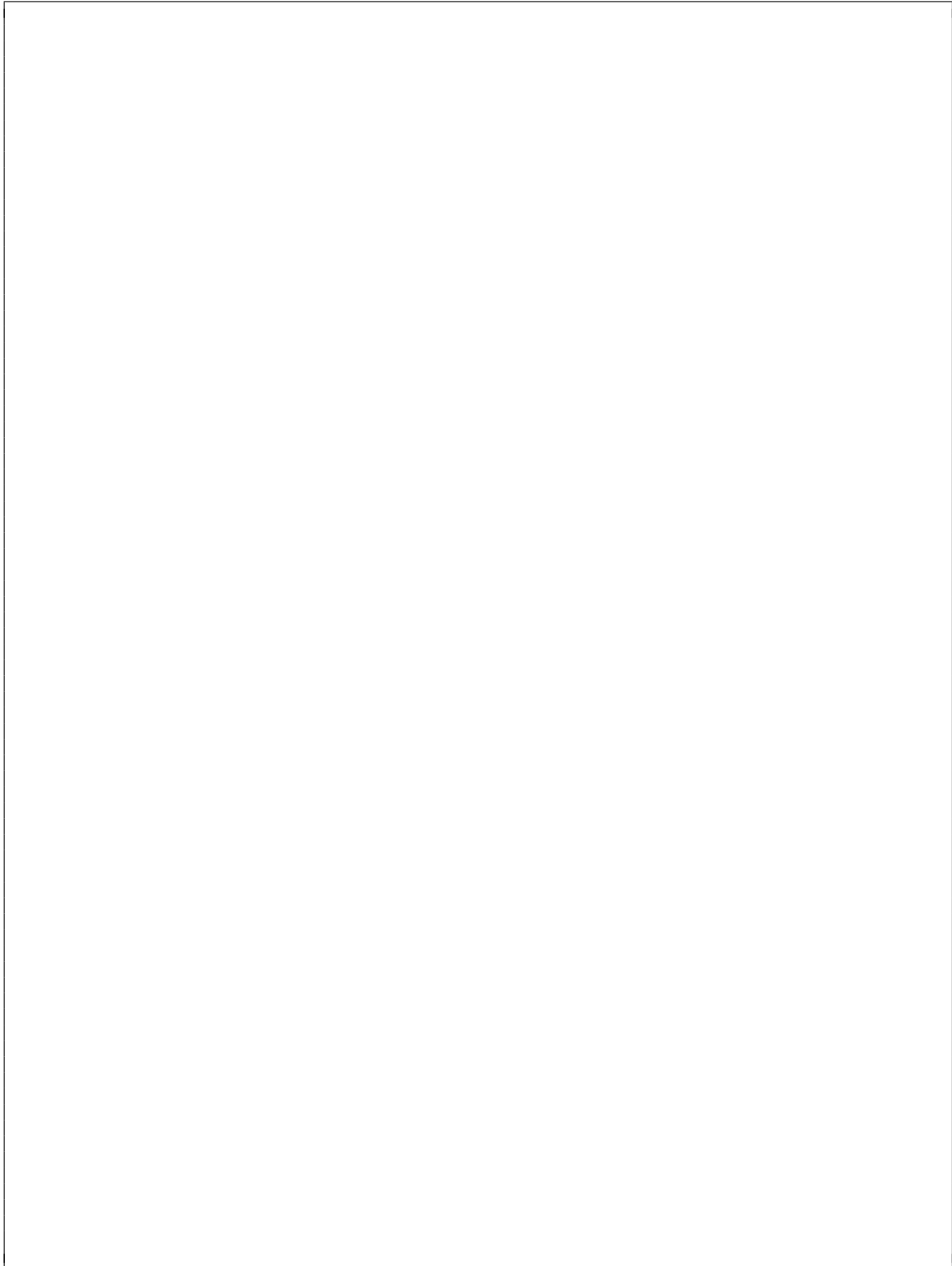
Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 2.** (6 Punkte)

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ . Für ein Wort  $w \in \Sigma^*$  mit  $|w| = n$  für  $n \geq 1$  bezeichnet  $w(i)$  das Alphabetsymbol an der  $i$ -ten Stelle in  $w$  für  $1 \leq i \leq n$ . Geben Sie für die folgende Sprache einen endlichen Automaten und einen regulären Ausdruck an.

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 6, w(3) = b, w \text{ endet mit } aaa\}$$



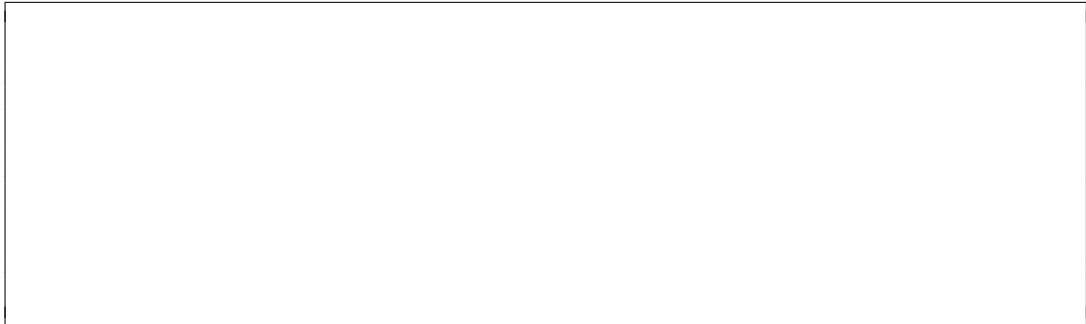
Name:

Matrikelnummer:

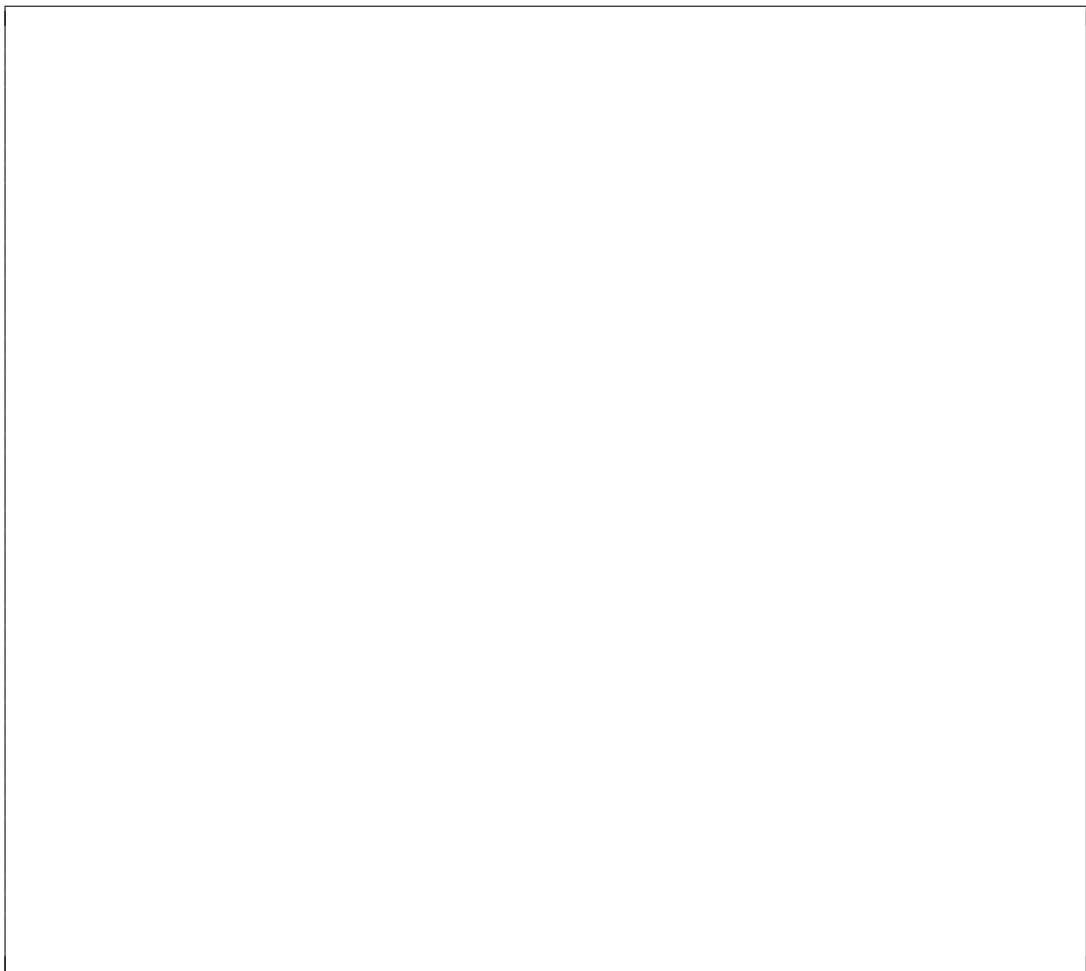
**Aufgabe 3.** (6 Punkte)Gegeben sei der NFA  $M = (\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta, \{1\}, \{1, 3\})$ , wobei  $\delta$  gegeben ist durch:

$\delta$	$a$	$b$
1	{1}	{3}
2	$\emptyset$	{2}
3	{1, 3}	{2, 3}

- (a) Zeichnen Sie das zu  $M$  gehörige Automatendiagramm.



- (b) Geben Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen zu  $M$  äquivalenten DFA an. Es genügt, den vom Startzustand erreichbaren Teil anzugeben.



Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 4.** (6 Punkte)

Sei  $f: \{a, b, c\} \rightarrow \{a, b, c\}$  definiert als  $f(a) = b$ ,  $f(b) = c$ ,  $f(c) = a$  und sei  $f^*: \{a, b, c\}^* \rightarrow \{a, b, c\}^*$  die Erweiterung von  $f$  auf Wörter, also zum Beispiel

$$f^*(bac) = f(b)f(a)f(c) = cba.$$

Zeigen Sie, dass folgende Sprache  $L \subseteq \{a, b, c, \#\}$  nicht regulär ist:

$$L = \{w\#f^*(w) \mid w \in \{a, b, c\}^*\}.$$

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 5.** (6 Punkte)

Gegeben sei der folgende nichtdeterministische Kellerautomat  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ , wobei  $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$ ,  $\Sigma = \{x, y, z\}$ ,  $\Gamma = \{\#, A\}$  und

- (1)  $\delta(z_0, z, \#) = \{(z_0, AA\#)\}$
- (2)  $\delta(z_0, z, A) = \{(z_0, AAA)\}$
- (3)  $\delta(z_0, y, A) = \{(z_1, \varepsilon)\}$
- (4)  $\delta(z_1, y, A) = \{(z_1, \varepsilon)\}$
- (5)  $\delta(z_1, x, A) = \{(z_2, \varepsilon)\}$
- (6)  $\delta(z_2, x, A) = \{(z_2, \varepsilon)\}$ .

Die Modifikationen aus Teilaufgabe (b) wird für (c) beibehalten.

- (a) Welche Sprache wird von dem Kellerautomaten erkannt?

- (b) Füge zusätzlich Transition (7)  $\delta(z_2, \varepsilon, \#) = \{(z_2, \varepsilon)\}$  hinzu. Welche Sprache erkennt der Automat nun?

- (c) Ersetze Transition (3) durch (3a)  $\delta(z_0, y, A) = \{(z_1, A)\}$ . Welche Sprache erkennt der Kellerautomat nach dieser Modifikation?



Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 6.** (6 Punkte)Gegeben sei die Grammatik  $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$  mit

$$P : S \rightarrow AB \mid BC \mid BA$$

$$C \rightarrow CA \mid c$$

$$A \rightarrow AA \mid AB \mid a$$

$$B \rightarrow BB \mid b$$

Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort  $bbcaab$  in  $L(G)$  enthalten ist.

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 7.** (6 Punkte)

Betrachten Sie die Grammatik  $G = (\{E\}, \{1, +\}, P, E)$ , wobei  $P$  gegeben ist durch

$$E \rightarrow E+E \mid 1$$

Geben Sie die Sprache  $L(G)$  an. Ist diese regulär? Begründen Sie Ihre Antwort!

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 8.** (6 Punkte)

Sei  $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_f\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_f\})$  eine deterministische Turingmaschine mit

$$\delta(z_0, 0) = (z_0, 0, R)$$

$$\delta(z_0, 1) = (z_0, 1, R)$$

$$\delta(z_0, \square) = (z_1, \square, L)$$

$$\delta(z_1, 0) = (z_2, \square, L)$$

$$\delta(z_1, 1) = (z_2, \square, L)$$

$$\delta(z_1, \square) = (z_2, \square, L)$$

$$\delta(z_2, 0) = (z_2, 0, L)$$

$$\delta(z_2, 1) = (z_2, 1, L)$$

$$\delta(z_2, \square) = (z_f, \square, R).$$

- (a) Welches Wort gibt die Turingmaschine bei Eingabe 10110 aus?

- (b) Welches Wort gibt die Turingmaschine bei Eingabe 111011 aus?

- (c) Fassen wir Eingaben und Ausgaben der Form  $w \in 1\{0, 1\}^* \cup \{0\}$  als binär kodierte natürliche Zahlen auf, so berechnet  $M$  eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (wobei wir die Eingaben  $n = 0$  und  $n = 1$  ausschließen). Welche Funktion  $f$  wird von der Turingmaschine  $M$  berechnet?

Name:

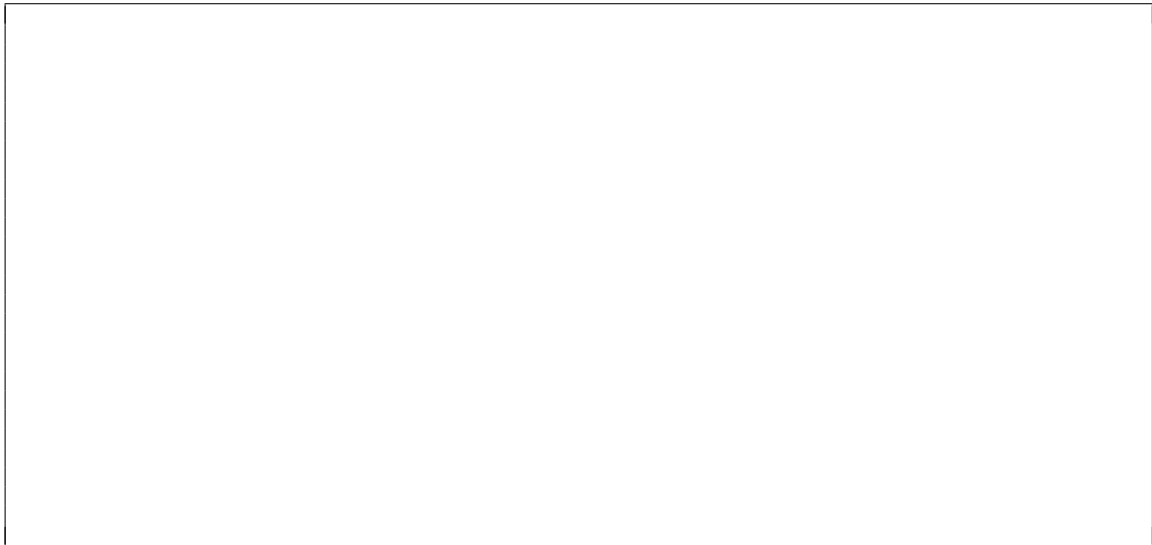
Matrikelnummer:

**Aufgabe 9.** (3 Punkte)

Geben Sie an, welche partielle Funktion  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  das folgende WHILE-Programm berechnet. Die Eingabevariablen sind  $x_1$  und  $x_2$ , und die Ausgabevariable ist  $x_1$ .

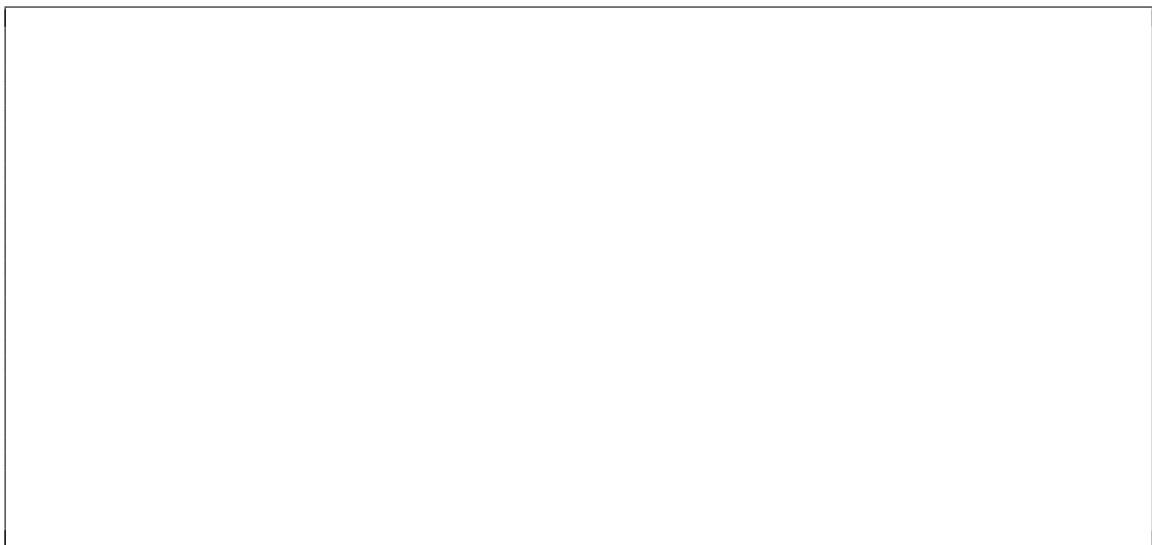
 $x_3 := x_2 + 5;$  $x_4 := x_1 - x_3;$ WHILE  $x_4 \neq 0$  DO $x_3 := x_3 + 1;$  $x_2 := x_1 + x_3$ 

END;

 $x_1 := x_3 + 3$ **Aufgabe 10.** (3 Punkte)

Geben Sie an, welche Funktion von  $\mu f$  berechnet wird, wobei  $f: \mathbb{N}^4 \rightarrow \mathbb{N}$  wie folgt definiert ist:

$$f(n, x, y, z) = 2x - n^5 zy$$



Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 11 (Bonus).** (5 Punkte)Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ . Gegeben sind die Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \text{ ist gerade}\}.$$

Konstruieren Sie einen endlichen Automaten, der die Sprache

$$(\Sigma^* \setminus L_1) \cup L_2$$

akzeptiert.

