Prüfung zur Vorlesung „Grundlagen der Theoretischen Informatik“

SS 2021 / 16. August 2021

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe	Punktzahl	Erreicht
1	12	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
6	6	
7	6	
8	6	
9	3	
10	3	
11	0	
$\boldsymbol{\Sigma}$	60	

Hinweise

- Prüfungsdauer: **120 Minuten**. Die Prüfung findet als Take-Home-Exam von **15 bis 17 Uhr** statt.
- Die Lösungen müssen mit der Hand geschrieben werden. Schreiben Sie bitte deutlich. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Es ist nicht notwendig, die Klausur auszudrucken: Sie können Ihre Lösungen gerne auf eigene (einfarbig weiße, linierte oder karierte) DIN-A4-Blätter schreiben.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Aufgabennummer.
- Die fertigen Lösungen scannen oder fotografieren Sie. Achten Sie auf gute Lesbarkeit. Wir empfehlen die kostenlose App Adobe Scan zum Einscannen der Seiten. Alternativ können Sie die Lösungen auch direkt auf einem Tablet mit der Hand schreiben und uns das PDF schicken.
- Ihre Lösungen müssen bis spätestens 17:20 Uhr am 16. August 2021 bei einer der folgenden E-Mail-Adressen ankommen:
  (a) michael.figelius@uni-siegen.de (Nachnamen mit A–F)
  (b) reh@eti.uni-siegen.de (Nachnamen mit G–L)
  (c) seelbach@eti.uni-siegen.de (Nachnamen mit M–S)
  (d) andreas.rosowski@uni-siegen.de (Nachnamen mit T–Z)
- Zusammen mit Ihren Lösungen schicken Sie eine ausgefüllte und unterschriebene Erklärung über die eigenständige Erbringung der Prüfungsleistung, siehe `https://www.uni-siegen.de/zuv/dezernat3/abteilung_3_2/eigenstaendigkeitserklaerung_homepage_ab_18.02.2021.pdf`.
- Alle Hilfsmittel sind erlaubt bis auf die Hilfestellung durch eine andere Person.

Aufgabe 1. (12 Punkte)
Beantworten Sie die folgenden sechs Fragen. Für jede Teilaufgabe gibt es zwei Punkte, wenn Sie die Aufgabe vollständig und korrekt beantwortet haben.

(1) Sei $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Geben Sie Sprachen $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$ an, sodass L_1 entscheidbar ist, L_2 nicht regulär ist, L_3 nicht kontextfrei ist, und $L_1 = L_2 \cup L_3$ gilt.

Lösung: $L_1 = L_2 = L_3 = \{\alpha^n \beta^n \gamma^n \mid n \geq 0\}$

(2) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ an, die Turing-berechenbar, aber nicht primitiv rekursiv ist.

Lösung: $f(x, y, z) =$ undefiniert (überall)

(3) Sei $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen $S \to aA$ und $A \to AA \mid a$ eine Grammatik. Geben Sie eine Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$ in Chomsky-Normalform an.

Lösung: $G' = (\{S, A, A_a\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen $S \to A_a A$, $A \to AA \mid a$ und $A_a \to a$.

(4) Sei $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ und sei $L = \{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält das Teilwort $\alpha\alpha\}$. Geben Sie die Myhill-Nerode Äquivalenzklassen bzgl. L an. Wie viele Zustände hat ein minimaler DFA, der L erkennt?

> **Lösung:** Myhill-Nerode-ÄK:
> $[\varepsilon] = \{w \mid w$ endet nicht auf α und enthält $\alpha\alpha$ nicht$\}$
> $[\alpha] = \{w \mid w$ endet auf α und enthält $\alpha\alpha$ nicht$\}$
> $[\alpha\alpha] = \{w \mid w$ enthält $\alpha\alpha\}$
> Ein minimaler DFA für L hat also 3 Zustände

(5) Gibt es eine Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$, die die Produktion $S \rightarrow aS$ enthält und die leere Sprache erzeugt? Begründen Sie Ihre Antwort.

> **Lösung:** Ja: Ohne eine weitere Produktion lässt sich kein Wort aus S ableiten, d.h. es gibt eine solche Grammatik.

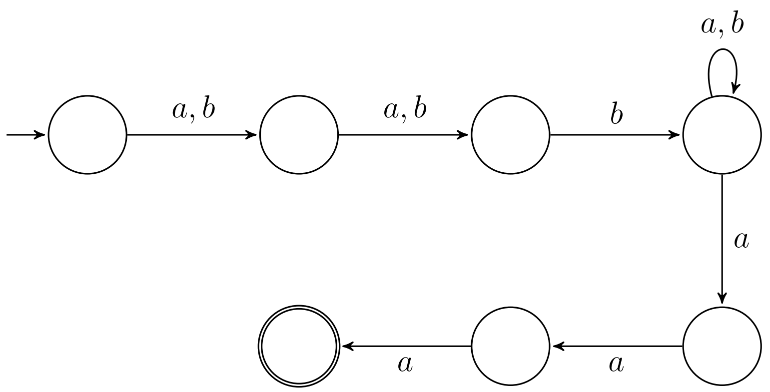
(6) Ist das folgende Problem unentscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
Gegeben: Eine natürliche Zahl n.
Frage: Ist n kein Folgenglied der Fibonacci Folge?

> **Lösung:** Das Problem ist entscheidbar: Berechne nacheinander die Folgenglieder $F(1), F(2), \ldots$ der Fibonacci Folge und teste, ob $F(k) = n$ für ein k. Sobald $F(k) > n$ gilt, gib 1 aus, falls $F(k) = n$ gilt, gib 0 aus. Jedes entscheidbare Problem ist nicht unentscheidbar.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w| = n$ für $n \geq 1$ bezeichnet $w(i)$ das Alphabetsymbol an der i-ten Stelle in w für $1 \leq i \leq n$. Geben Sie für die folgende Sprache einen endlichen Automaten und einen regulären Ausdruck an.

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 6, w(3) = b, w \text{ endet mit } aaa\}$$

Lösung: $(aab \mid abb \mid bab \mid bbb)(a \mid b)^*aaa$

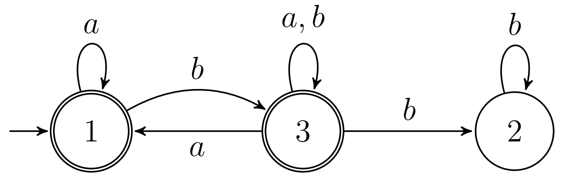


Aufgabe 3. (6 Punkte)
Gegeben sei der NFA $M = (\{1,2,3\}, \{a,b\}, \delta, \{1\}, \{1,3\})$, wobei δ gegeben ist durch:

δ	a	b
1	$\{1\}$	$\{3\}$
2	$\emptyset$	$\{2\}$
3	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$

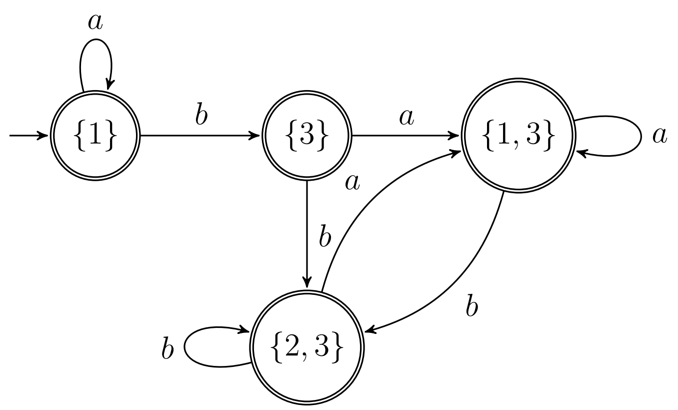
(a) Zeichnen Sie das zu M gehörige Automatendiagramm.

Lösung:



(b) Geben Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen zu M äquivalenten DFA an. Es genügt, den vom Startzustand erreichbaren Teil anzugeben.

Lösung:



Aufgabe 4. (6 Punkte)
Sei $f\colon \{a,b,c\} \to \{a,b,c\}$ definiert als $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$ und sei $f^*\colon \{a,b,c\}^* \to \{a,b,c\}^*$ die Erweiterung von f auf Wörter, also zum Beispiel

$$f^*(bac) = f(b)f(a)f(c) = cba.$$

Zeigen Sie, dass folgende Sprache $L \subseteq \{a,b,c,\#\}$ nicht regulär ist:

$$L = \{w\#f^*(w) \mid w \in \{a,b,c\}^*\}.$$

Lösung: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wähle $w = a^n\#b^n$. Es gilt $w \in L$, denn $a^n\#f^*(a^n) = w$. Außerdem ist $|w| = 2n+1 \geq n$. Sei $w = xyz$ eine Zerlegung mit $|y| \geq 1$ und $|xy| \leq n$. Dann gibt es $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $x = a^k$, $y = a^\ell$ mit $\ell \geq 1$ und $z = a^{n-k-\ell}\#b^n$. Es gilt $xy^0z \notin L$, weil $xy^0z = a^{n-\ell}\#b^n$, denn für jedes Wort $w' \in L$ muss gelten, dass es $w_\ell, w_r \in \{a,b,c\}^*$ gibt mit $w' = w_\ell\#w_r$ und $|w_\ell| = |w_r|$. Nach dem Pumping-Lemma ist also L nicht regulär.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Gegeben sei der folgende nichtdeterministische Kellerautomat $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$, wobei $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$, $\Sigma = \{x, y, z\}$, $\Gamma = \{\#, A\}$ und

(1) $\delta(z_0, z, \#) = \{(z_0, AA\#)\}$

(2) $\delta(z_0, z, A) = \{(z_0, AAA)\}$

(3) $\delta(z_0, y, A) = \{(z_1, \varepsilon)\}$

(4) $\delta(z_1, y, A) = \{(z_1, \varepsilon)\}$

(5) $\delta(z_1, x, A) = \{(z_2, \varepsilon)\}$

(6) $\delta(z_2, x, A) = \{(z_2, \varepsilon)\}$.

Die Modifikationen aus Teilaufgabe (b) wird für (c) beibehalten.

(a) Welche Sprache wird von dem Kellerautomaten erkannt?

Lösung: $L(M) = \emptyset$.

(b) Füge zusätzlich Transition (7) $\delta(z_2, \varepsilon, \#) = \{(z_2, \varepsilon)\}$ hinzu. Welche Sprache erkennt der Automat nun?

Lösung: $L(M) = \{z^k y^\ell x^m \mid k, \ell, m \geq 1, 2k = \ell + m\}$.

(c) Ersetze Transition (3) durch (3a) $\delta(z_0, y, A) = \{(z_1, A)\}$.
Welche Sprache erkennt der Kellerautomat nach dieser Modifikation?

Lösung: $L(M) = \{z^k y^\ell x^m \mid k, \ell, m \geq 1, 2k + 1 = \ell + m\}$.

Aufgabe 6. (6 Punkte)
Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$ mit

$$\begin{aligned} P : S &\to AB \mid BC \mid BA \\ C &\to CA \mid c \\ A &\to AA \mid AB \mid a \\ B &\to BB \mid b \end{aligned}$$

Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort *bbcaab* in $L(G)$ enthalten ist.

Lösung: Der CYK-Algorithmus liefert folgende Tabelle:

Länge	b	b	c	a	a	b
1	B	B	C	A	A	B
2	B	S	C	A	A, S	-
3	S	S	C	A, S	-	-
4	S	S	C	-	-	-
5	S	S	-	-	-	-
6	S	-	-	-	-	-

Also ist $bbcaab \in L(G)$.

Aufgabe 7. (6 Punkte)
Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{E\}, \{1, +\}, P, E)$, wobei P gegeben ist durch

$$E \to E{+}E \mid 1$$

Geben Sie die Sprache $L(G)$ an. Ist diese regulär? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung: Die Sprache ist

$$L(G) = \{1{+}\}^*\{1\}.$$

Diese ist regulär und wird z.B. durch den regulären Ausdruck $(1{+})^*1$ erkannt.

Es folgt noch ein Beweis dieser Aussage. Dieser ist nicht nötig, um volle Punktzahl zu erhalten. Zunächst stellen wir fest, dass für alle $w \in \{1, +\}^*\{1\}$ eine Ableitung existiert: Sei $w \in \{1, +\}^*\{1\}$. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $w = (1{+})^n 1$. Es gilt

$$E \to^n (E{+})^n E \to^{n+1} (1{+})^n 1 = w.$$

Um zu zeigen, dass nicht noch andere Wörter abgeleitet werden können, betrachten wir alle möglichen Ableitungen. Wir nehmen hierbei an, dass kürzere Ableitungen, die mit E beginnen, nur Wörter aus $\{1{+}\}^*\{1\}$ produzieren. Sei $E \to^* w$ mit $w \in \{1, +\}^*$ eine Ableitung. Falls $E \to 1$ als erstes angewandt wurde, so gilt $w = 1 \in \{1{+}\}^*\{1\}$. Falls $E \to E{+}E$ als erstes angewandt wurde, also $E \to E{+}E \to^* w$, so nehmen wir an, dass es $n, m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass das linke E zu $(1{+})^n 1$ abgeleitet wurde und das rechte E zu $(1{+})^m 1$. Wir erhalten also, dass

$$w = (1{+})^n 1{+}(1{+})^m 1 = (1{+})^{n+m+1} 1 \in \{1{+}\}^*\{1\}.$$

Aufgabe 8. (6 Punkte)
Sei $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_f\}, \{0,1\}, \{0,1,\Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_f\})$ eine deterministische Turingmaschine mit

$$\begin{aligned}
\delta(z_0, 0) &= (z_0, 0, R)\\
\delta(z_0, 1) &= (z_0, 1, R)\\
\delta(z_0, \Box) &= (z_1, \Box, L)\\
\delta(z_1, 0) &= (z_2, \Box, L)\\
\delta(z_1, 1) &= (z_2, \Box, L)\\
\delta(z_1, \Box) &= (z_2, \Box, L)\\
\delta(z_2, 0) &= (z_2, 0, L)\\
\delta(z_2, 1) &= (z_2, 1, L)\\
\delta(z_2, \Box) &= (z_f, \Box, R).
\end{aligned}$$

(a) Welches Wort gibt die Turingmaschine bei Eingabe 10110 aus?

> **Lösung:** 1011

(b) Welches Wort gibt die Turingmaschine bei Eingabe 111011 aus?

> **Lösung:** 11101

(c) Fassen wir Eingaben und Ausgaben der Form $w \in 1\{0,1\}^* \cup \{0\}$ als binär kodierte natürliche Zahlen auf, so berechnet M eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (wobei wir die Eingaben $n = 0$ und $n = 1$ ausschließen). Welche Funktion f wird von der Turingmaschine M berechnet?

> **Lösung:** $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ (für $n \geq 2$)

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Geben Sie an, welche partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ das folgende WHILE-Programm berechnet. Die Eingabevariablen sind x_1 und x_2, und die Ausgabevariable ist x_1.

$x_3 := x_2 + 5;$
$x_4 := x_1 - x_3;$
WHILE $x_4 \neq 0$ DO
  $x_3 := x_3 + 1;$
  $x_2 := x_1 + x_3$
END;
$x_1 := x_3 + 3$

Lösung:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2 + 5 + 3, & \text{falls } x_1 \leq x_2 + 5, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Geben Sie an, welche Funktion von μf berechnet wird, wobei $f\colon \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ wie folgt definiert ist:

$$f(n, x, y, z) = 2x - n^5 zy$$

Lösung:

$$\mu f(x, y, z) = \begin{cases} \text{undefiniert} & \text{falls } x > 0 \text{ und } (y = 0 \text{ oder } z = 0) \\ 0 & \text{falls } x = 0 \text{ und } (y = 0 \text{ oder } z = 0) \\ \left\lceil \sqrt[5]{\frac{2x}{zy}} \right\rceil & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 11 (Bonus). (5 Punkte)
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Gegeben sind die Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist gerade}\}.$$

Konstruieren Sie einen endlichen Automaten, der die Sprache

$$(\Sigma^* \setminus L_1) \cup L_2$$

akzeptiert.

Lösung: