Nachklausur zur Vorlesung „Grundlagen der Theoretischen Informatik“

WS 2020/21 / 15. März 2021

Vorname: ______________________

Nachname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Aufgabe	**Punktzahl**	**Erreicht**
1	12	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
6	6	
7	6	
8	6	
9	3	
10	3	
11	0	
$\boldsymbol{\Sigma}$	60	

Generelle Hinweise:

- Prüfungsdauer: **120 Minuten**. Die Klausur findet als Take-Home-Exam von **14 bis 16 Uhr** statt
- Wenn Sie in der Klausur **30 Punkte** erreichen, haben Sie mit Sicherheit bestanden.
- Überprüfen Sie die Ihnen zugesendete Klausur auf Vollständigkeit (**11 Aufgaben** auf 10 Seiten).
- Fertigen Sie bitte Ihre Lösungen handschriftlich an. Schreiben Sie bitte **deutlich**. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Sie können Ihre Lösungen gerne auf einfarbig weiße, linierte oder karierte DIN-A4-Blätter schreiben oder die Klausur ausdrucken
- Beschriften Sie **jedes Blatt** mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, und der Nummer der **Aufgabe**, die Sie bearbeiten
- Die fertigen Lösungen **scannen oder fotografieren** Sie. Achten Sie auf gute Lesbarkeit. Wir empfehlen die kostenlose App Adobe Scan zum einscannen der Seiten.
- Ihre Lösungen müssen bis **spätestens 16.20 Uhr** am 15. März 2021 (heute) bei einer der folgenden Adressen ankommen:
  (a) michael.figelius@uni-siegen.de (Nachname A-I)
  (b) reh@eti.uni-siegen.de (Nachname J-R)
  (c) seelbach@eti.uni-siegen.de (Nachname S-Z)
- Zusammen mit Ihren Lösungen schicken Sie eine ausgefüllte und unterschriebene Erklärung über die eigenständige Erbringung der Prüfungsleistung, siehe

  `https://www.uni-siegen.de/zuv/dezernat3/abteilung_3_2/eigenstaendigkeitserklaerung_homepage_ab_18.02.2021.pdf`
- Alle Hilfsmittel sind erlaubt, bis auf die Hilfestellung durch eine andere Person

Inhaltliche Hinweise:

- Endliche Automaten können wahlweise grafisch oder tabellarisch angegeben werden.
- In den WHILE- und LOOP-Programmen dürfen Sie die Addition, Multiplikation, die in der Vorlesung definierte Subtraktion und für eine Variable x die Bedingung IF $x = 0$ THEN P END als WHILE- bzw. LOOP-berechenbar voraussetzen und in Ihren Programmen verwenden. Geben Sie an, in welcher Variable der Ausgabewert am Ende steht.
- Sie dürfen annehmen, dass die Addition und Multiplikation zweier natürlicher Zahlen primitiv-rekursiv sind.
- Für die Konstruktion von μ- bzw. primitiv-rekursiven Funktionen und für WHILE- und LOOP-Programme darf die Schreibweise aus den Übungen benutzt werden.

Aufgabe 1. (12 Punkte) Beantworten Sie die folgenden sechs Fragen. Für jede Teilaufgabe gibt es zwei Punkte, wenn Sie die Aufgabe vollständig und korrekt beantwortet haben.

(1) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine reguläre Sprache L mit $LL = L$.

> **Lösung:** Richtig. Sei $L = \{\varepsilon\}$, dann ist $LL = \{\varepsilon\} = L$.

(2) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ an, sodass $\mu f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ undefiniert ist.

> **Lösung:** $f(n, x, y) = x + 1 + ny$

(3) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie eine nicht reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ und eine nicht reguläre Sprache $L' \neq L$ an, so dass $L \subseteq L'$.

> **Lösung:** $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, $L' = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

(4) Sei $BAB\#$ der Kellerinhalt eines Kellerautomaten (B ist ganz oben auf dem Keller und $\#$ ist ganz unten), der sich im Zustand z befindet. Geben Sie den Kellerinhalt an, wenn in den nächsten beiden Schritten jeweils das Symbol a gelesen wird und in beiden Schritten die Transition $(z, B) \in \delta(z, a, B)$ angewandt wird.

> **Lösung:** $BAB\# \to BAB\# \to BAB\#$

(5) Gibt es eine Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$, die die Produktion $S \to a$ enthält und eine unendliche Sprache erzeugt? Begründen Sie ihre Antwort.

> **Lösung:** Ja: Nehme z.B. zusätzlich die Produktion $S \to aS$ hinzu.

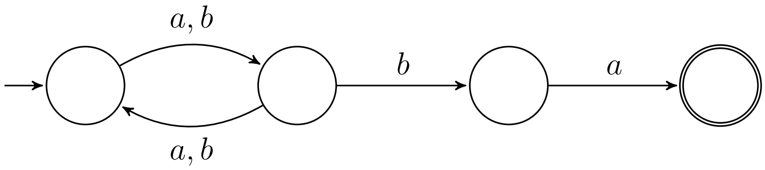
(6) Sei $L \subseteq \{a, b\}^*$ eine entscheidbare Sprache. Ist $\{a, b\}^* \setminus L$ entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

> **Lösung:** Da L entscheidbar ist, ist die charakteristische Funktion χ_L mittels einer Turingmaschine M berechenbar. Sei M' die Turingmaschine, die M simuliert, aber bei der die Ausgaben 0 und 1 vertauscht sind. Diese gibt also 0 aus, wenn M den Wert 1 ausgibt, und umgekehrt. Dann berechnet M' die charakteristische Funktion von $\{a, b\}^* \setminus L$. Somit ist $\{a, b\}^* \setminus L$ auch entscheidbar.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen einen endlichen Automaten und einen regulären Ausdruck an.

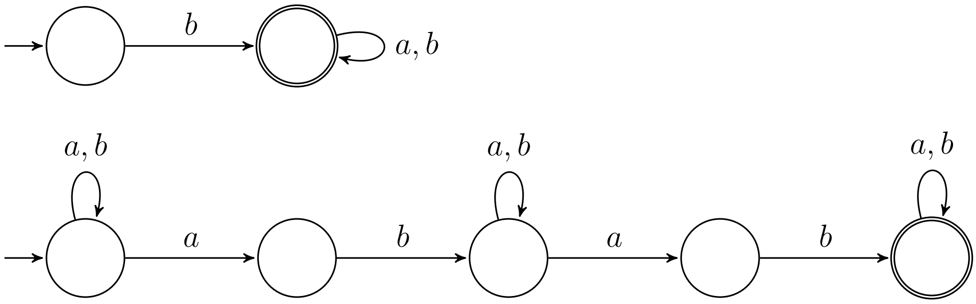
(a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ endet mit } ba \text{ und } |w| \text{ ist ungerade}\}$

Lösung: $(aa|ab|ba|bb)^*(a|b)ba$



(b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } b \text{ oder } w \text{ enthält mind. zweimal das Teilwort } ab\}$

Lösung: $b(a|b)^* \mid (a|b)^*ab(a|b)^*ab(a|b)^*$

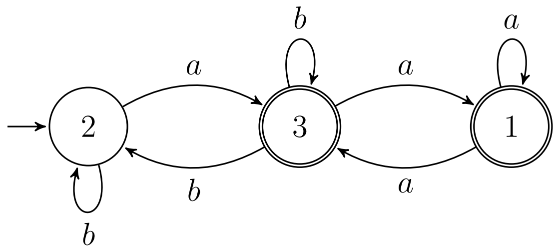


Aufgabe 3. (6 Punkte) Gegeben sei der NFA $M = (\{1,2,3\}, \{a,b\}, \delta, \{2\}, \{1,3\})$, wobei δ gegeben ist durch:

δ	a	b
1	$\{1,3\}$	$\emptyset$
2	$\{3\}$	$\{2\}$
3	$\{1\}$	$\{2,3\}$

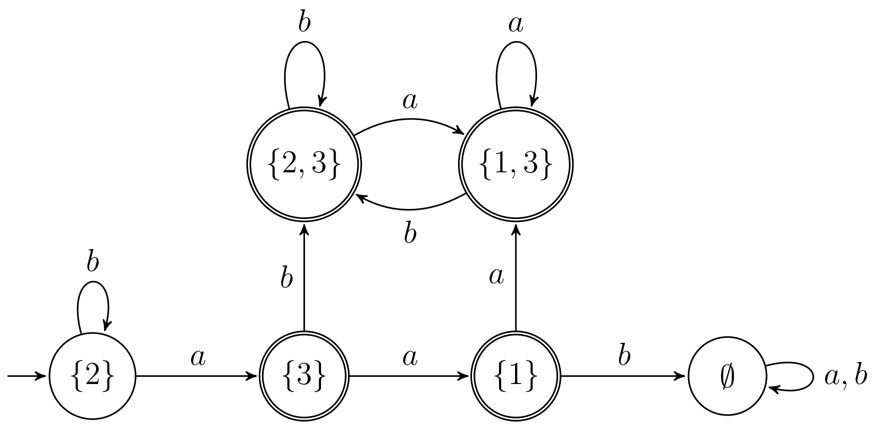
(a) Zeichnen Sie das zu M gehörige Automatendiagramm.

Lösung:



(b) Geben Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen zu M äquivalenten DFA an. Es genügt, den vom Startzustand erreichbaren Teil anzugeben.

Lösung:



Aufgabe 4. (6 Punkte) Gegeben sei die folgende Sprache $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ mit

$$L = \{a^{2m}bc^{2m+5} \mid m \geq 0, m \text{ ist durch 4 teilbar}\}.$$

Ist L regulär? Wenn ja, geben Sie einen endlichen Automaten oder einen regulären Ausdruck an, der L beschreibt. Wenn nein, beweisen Sie, dass L nicht regulär ist.

Lösung: Pumping Lemma: Sei $k \in \mathbb{N}$. Sei $w = a^{8k}bc^{8k+5}$, dann ist $w \in L$ und $|w| \geq k$. Sei $w = xyz$ eine Zerlegung von w mit $|xy| \leq k$ und $|y| \geq 1$. Also gibt es $i, j \in \mathbb{N}$ mit $x = a^i$, $y = a^j$ und $z = a^{8k-i-j}bc^{8k+5}$. Mit Pumpfaktor 0 erhalten wir

$$w' := xy^0z = a^{8k-j}bc^{8k+5}.$$

Da $j \geq 1$, gilt $w' \notin L$, und somit ist L nach dem Pumping Lemma nicht regulär.

Aufgabe 5. (6 Punkte) Gegeben sei der folgende nichtdeterministische Kellerautomat $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$, wobei $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{\#, C\}$ und

(1) $\delta(z_0, 0, \#) = \{(z_0, C\#)\}$

(2) $\delta(z_0, 0, C) = \{(z_0, CCC)\}$

(3) $\delta(z_0, 1, C) = \{(z_1, C)\}$

(4) $\delta(z_1, 0, C) = \{(z_2, \varepsilon)\}$

(5) $\delta(z_2, 0, C) = \{(z_2, \varepsilon)\}$.

Die Modifikationen aus Teilaufgabe (b) wird für (c) beibehalten.

(a) Welche Sprache wird von dem Kellerautomaten erkannt?

Lösung: $L(M) = \emptyset$.

(b) Ersetze Transition (1) durch (1a) $\delta(z_0, 0, \#) = \{(z_0, C)\}$.
Welche Sprache erkennt der Kellerautomat nach dieser Modifikation?

Lösung: $L(M) = \{0^m 1 0^{2m-1} \mid m \geq 1\}$.

(c) Füge zusätzlich Transition (6) $\delta(z_1, 1, C) = \{(z_1, C)\}$ hinzu. Welche Sprache erkennt der Automat nun?

Lösung: $L(M) = \{0^m 1^k 0^{2m-1} \mid m, k \geq 1\}$.

Aufgabe 6. (6 Punkte) Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$ mit

$$\begin{aligned} P: S &\to AB \mid AC \\ A &\to AB \mid BC \mid a \\ B &\to BB \mid CA \mid b \\ C &\to c. \end{aligned}$$

Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort *cacbb* in $L(G)$ enthalten ist.

Lösung: Der CYK-Algorithmus liefert folgende Tabelle:

Länge	c	a	c	b	b
1	C	A	C	B	B
2	B	S	-	B	-
3	A	-	-	-	-
4	S, A	-	-	-	-
5	S, A	-	-	-	-

Also ist $cacbb \in L(G)$.

Aufgabe 7. (6 Punkte) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie für

$$L = \{a^n w a^n \mid n \geq 0, w \in \Sigma^*, |w| \text{ gerade}\}$$

eine kontextfreie Grammatik an.

Lösung: Die Sprache L lässt sich schreiben als

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ gerade}\}.$$

Es gilt $L(G) = L$ mit $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$, wobei

$$P: \quad S \to aSa \mid bSb \mid aSb \mid bSa \mid \varepsilon$$

Aufgabe 8. (6 Punkte) Sei $M = (\{z_0, z_1, z_f\}, \{b, c\}, \{b, c, \Box\}, \delta, z_0, \Box, \{z_f\})$ eine deterministische Turingmaschine mit

$$\begin{aligned}\delta(z_1, b) &= (z_0, b, R)\\ \delta(z_1, c) &= (z_1, c, N)\\ \delta(z_0, c) &= (z_1, c, R)\\ \delta(z_0, b) &= (z_0, b, N)\\ \delta(z_1, \Box) &= (z_f, \Box, N)\\ \delta(z_0, \Box) &= (z_0, \Box, N)\end{aligned}$$

(a) Akzeptiert M das Wort $w_1 = cbcb$? ○ ja √ **nein**

(b) Akzeptiert M das Wort $w_2 = cccbcbcb$? ○ ja √ **nein**

(c) Welche Sprache akzeptiert M?

Lösung: $L(M) = \{c(bc)^n \mid n \geq 0\}$

Aufgabe 9. (3 Punkte) Geben Sie an, welche partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ das folgende WHILE-Programm berechnet (Eingabevariablen sind x_1 und x_2, die Ausgabevariable ist x_1):

$x_2 := x_2 + x_1\,;$
$x_1 := x_1 - x_2\,;$
$x_3 := x_1 + 1\,;$
WHILE $x_1 \neq 0$ DO
  $x_1 := x_1 - 1\,;$
  $x_3 := x_2 + x_1$
END ;
$x_1 := x_3 + 4$

Lösung:

$$f(x_1, x_2) = 5$$

Aufgabe 10. (3 Punkte) Geben Sie an, welche Funktion von μf berechnet wird, wobei $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ wie folgt definiert ist:

$$f(n, x, y) = 2x - n \cdot (y - 5)$$

Lösung:

$$\mu f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \text{undefiniert,} & \text{falls } x > 0 \text{ und } y \leq 5 \\ \left\lceil \frac{2x}{y-5} \right\rceil & \text{falls } x > 0 \text{ und } y > 5. \end{cases}$$

Aufgabe 11. (5 Punkte (Bonus)) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Gegeben sind die Sprachen

$$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält mindestens ein } b\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{b^{n^2} \mid n \geq 0\}.$$

Weiterhin sei

$$L_3 := L_1 L_2 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}.$$

Gilt $L_3 = L_1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: $L_3 \subseteq L_1$: Sei $w \in L_3$. Dann ist $w = uv$, wobei $u \in L_1$. Insbesondere enthält u mindestens ein b, also enthält auch $w = uv$ mindestens ein b.

$L_1 \subseteq L_3$: Sei $w \in L_1$ und sei $u = b^{0^2} = \varepsilon$, dann ist $u \in L_2$ und $w = wu \in L_3$.

Insgesamt gilt also $L_1 = L_3$.