

# Nachklausur zur Vorlesung „Grundlagen der Theoretischen Informatik“

WS 2020/21 / 15. März 2021

Vorname: \_\_\_\_\_

Nachname: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

| Aufgabe  | Punktzahl | Erreicht |
|----------|-----------|----------|
| 1        | 12        |          |
| 2        | 6         |          |
| 3        | 6         |          |
| 4        | 6         |          |
| 5        | 6         |          |
| 6        | 6         |          |
| 7        | 6         |          |
| 8        | 6         |          |
| 9        | 3         |          |
| 10       | 3         |          |
| 11       | 0         |          |
| $\Sigma$ | 60        |          |

## Generelle Hinweise:

- Prüfungsdauer: **120 Minuten**. Die Klausur findet als Take-Home-Exam von **14 bis 16 Uhr** statt
- Wenn Sie in der Klausur **30 Punkte** erreichen, haben Sie mit Sicherheit bestanden.
- Überprüfen Sie die Ihnen zugesendete Klausur auf Vollständigkeit (**11 Aufgaben** auf 10 Seiten).
- Fertigen Sie bitte Ihre Lösungen handschriftlich an. Schreiben Sie bitte **deutlich**. Unleserliche Lösungen sind ungültig.
- Sie können Ihre Lösungen gerne auf einfarbig weiße, linierte oder karierte DIN-A4-Blätter schreiben oder die Klausur ausdrucken
- Beschriften Sie **jedes Blatt** mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer**, und der Nummer der **Aufgabe**, die Sie bearbeiten
- Die fertigen Lösungen **scannen oder fotografieren** Sie. Achten Sie auf gute Lesbarkeit. Wir empfehlen die kostenlose App Adobe Scan zum einscannen der Seiten.
- Ihre Lösungen müssen bis **spätestens 16.20 Uhr** am 15. März 2021 (heute) bei einer der folgenden Adressen ankommen:
  - (a) michael.figelius@uni-siegen.de (Nachname A-I)
  - (b) reh@eti.uni-siegen.de (Nachname J-R)
  - (c) seelbach@eti.uni-siegen.de (Nachname S-Z)
- Zusammen mit Ihren Lösungen schicken Sie eine ausgefüllte und unterschriebene Erklärung über die eigenständige Erbringung der Prüfungsleistung, siehe [https://www.uni-siegen.de/zuv/dezernat3/abteilung\\_3\\_2/eigenstaendigkeitserklaerung\\_homepage\\_ab\\_18.02.2021.pdf](https://www.uni-siegen.de/zuv/dezernat3/abteilung_3_2/eigenstaendigkeitserklaerung_homepage_ab_18.02.2021.pdf)
- Alle Hilfsmittel sind erlaubt, bis auf die Hilfestellung durch eine andere Person

## Inhaltliche Hinweise:

- Endliche Automaten können wahlweise grafisch oder tabellarisch angegeben werden.
- In den WHILE- und LOOP-Programmen dürfen Sie die Addition, Multiplikation, die in der Vorlesung definierte Subtraktion und für eine Variable  $x$  die Bedingung `IF  $x = 0$  THEN  $P$  END` als WHILE- bzw. LOOP-berechenbar voraussetzen und in Ihren Programmen verwenden. Geben Sie an, in welcher Variable der Ausgabewert am Ende steht.
- Sie dürfen annehmen, dass die Addition und Multiplikation zweier natürlicher Zahlen primitiv-rekursiv sind.
- Für die Konstruktion von  $\mu$ - bzw. primitiv-rekursiven Funktionen und für WHILE- und LOOP-Programme darf die Schreibweise aus den Übungen benutzt werden.

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 1.** (12 Punkte) Beantworten Sie die folgenden sechs Fragen. Für jede Teilaufgabe gibt es zwei Punkte, wenn Sie die Aufgabe vollständig und korrekt beantwortet haben.

- (1) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine reguläre Sprache  $L$  mit  $LL = L$ .

- (2) Geben Sie eine Funktion  $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  an, sodass  $\mu f(x, y)$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  undefiniert ist.

- (3) Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ . Geben Sie eine nicht reguläre Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  und eine nicht reguläre Sprache  $L' \neq L$  an, so dass  $L \subseteq L'$ .

- (4) Sei  $BAB\#$  der Kellerinhalt eines Kellerautomaten ( $B$  ist ganz oben auf dem Keller und  $\#$  ist ganz unten), der sich im Zustand  $z$  befindet. Geben Sie den Kellerinhalt an, wenn in den nächsten beiden Schritten jeweils das Symbol  $a$  gelesen wird und in beiden Schritten die Transition  $(z, B) \in \delta(z, a, B)$  angewandt wird.

- (5) Gibt es eine Grammatik  $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ , die die Produktion  $S \rightarrow a$  enthält und eine unendliche Sprache erzeugt? Begründen Sie ihre Antwort.

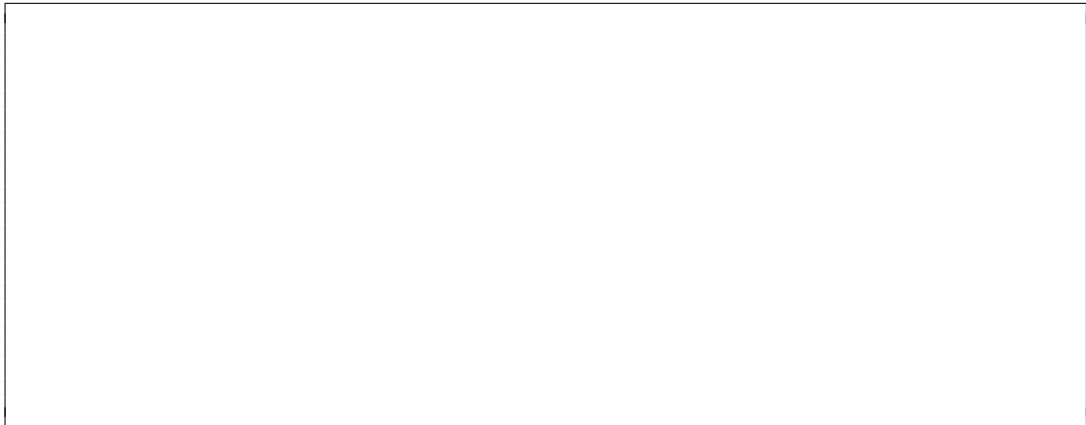
- (6) Sei  $L \subseteq \{a, b\}^*$  eine entscheidbare Sprache. Ist  $\{a, b\}^* \setminus L$  entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name:

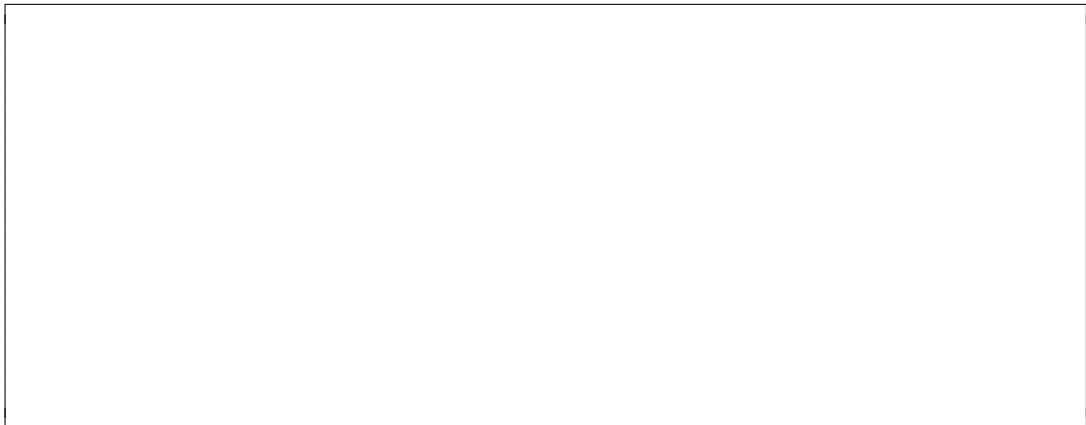
Matrikelnummer:

**Aufgabe 2.** (6 Punkte) Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ . Geben Sie für jede der folgenden Sprachen einen endlichen Automaten und einen regulären Ausdruck an.

(a)  $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ endet mit } ba \text{ und } |w| \text{ ist ungerade}\}$



(b)  $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } b \text{ oder } w \text{ enthält mind. zweimal das Teilwort } ab\}$



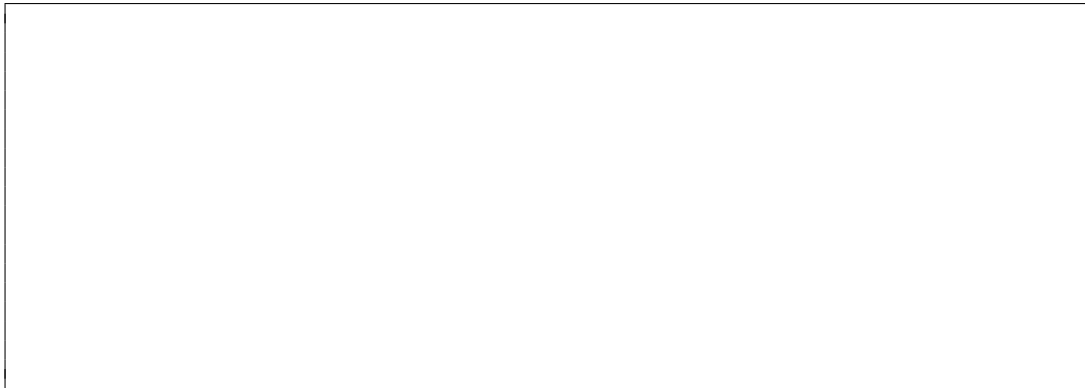
Name:

Matrikelnummer:

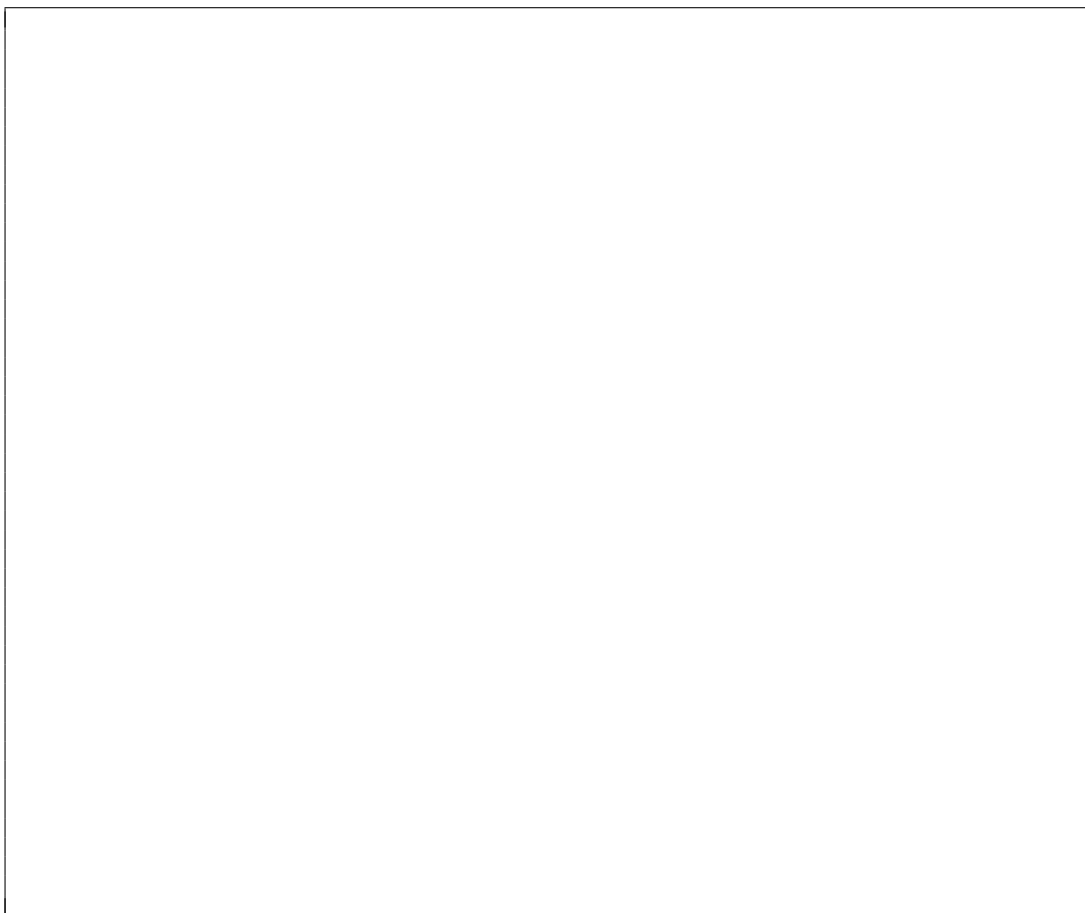
**Aufgabe 3.** (6 Punkte) Gegeben sei der NFA  $M = (\{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \delta, \{2\}, \{1, 3\})$ , wobei  $\delta$  gegeben ist durch:

| $\delta$ | $a$        | $b$         |
|----------|------------|-------------|
| 1        | $\{1, 3\}$ | $\emptyset$ |
| 2        | $\{3\}$    | $\{2\}$     |
| 3        | $\{1\}$    | $\{2, 3\}$  |

- (a) Zeichnen Sie das zu  $M$  gehörige Automatendiagramm.



- (b) Geben Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen zu  $M$  äquivalenten DFA an. Es genügt, den vom Startzustand erreichbaren Teil anzugeben.



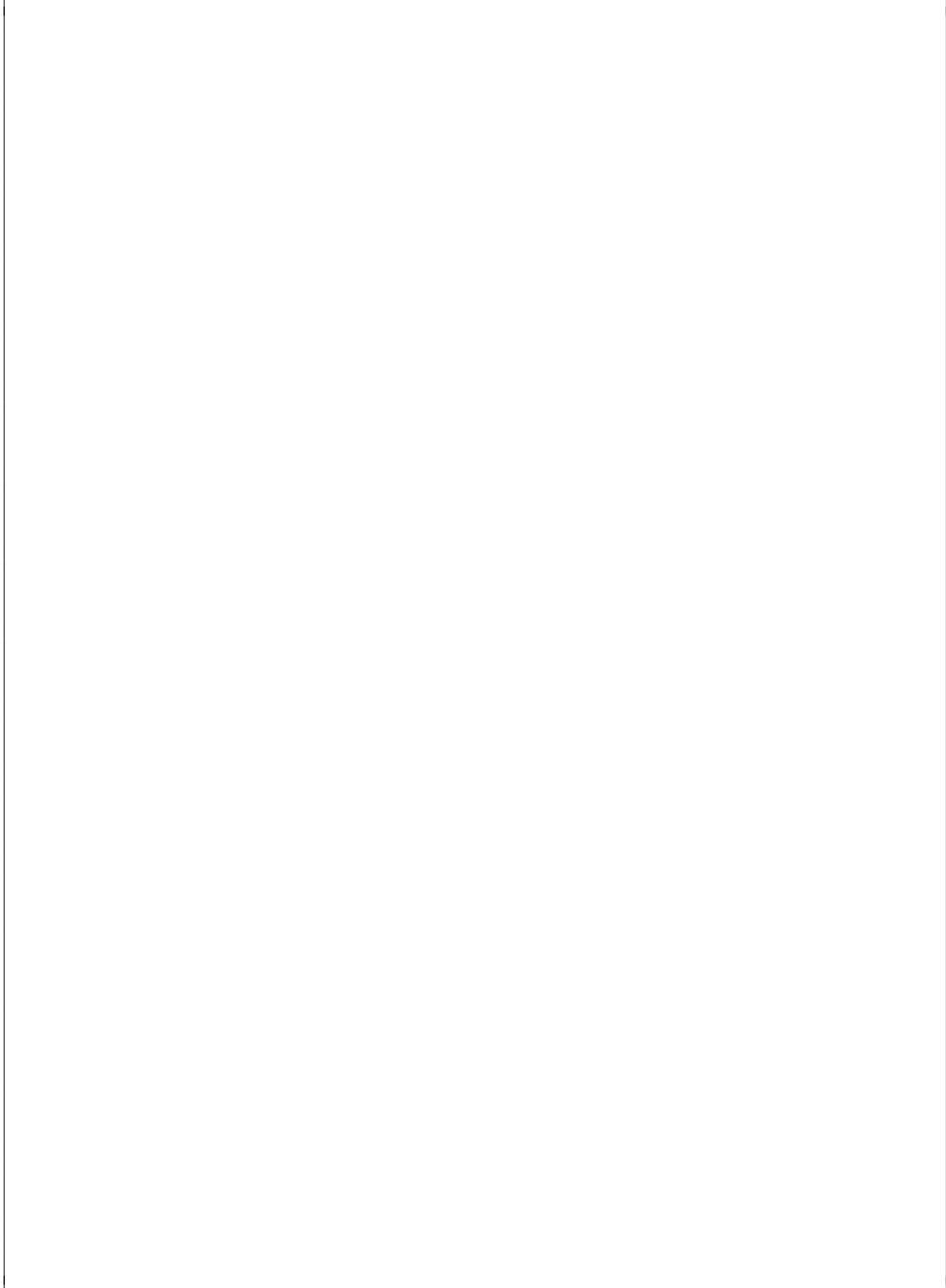
Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 4.** (6 Punkte) Gegeben sei die folgende Sprache  $L \subseteq \{a, b, c\}^*$  mit

$$L = \{a^{2m}bc^{2m+5} \mid m \geq 0, m \text{ ist durch } 4 \text{ teilbar}\}.$$

Ist  $L$  regulär? Wenn ja, geben Sie einen endlichen Automaten oder einen regulären Ausdruck an, der  $L$  beschreibt. Wenn nein, beweisen Sie, dass  $L$  nicht regulär ist.



Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 5.** (6 Punkte) Gegeben sei der folgende nichtdeterministische Kellerautomat  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ , wobei  $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$ ,  $\Sigma = \{0, 1\}$ ,  $\Gamma = \{\#, C\}$  und

- (1)  $\delta(z_0, 0, \#) = \{(z_0, C\#)\}$
- (2)  $\delta(z_0, 0, C) = \{(z_0, CCC)\}$
- (3)  $\delta(z_0, 1, C) = \{(z_1, C)\}$
- (4)  $\delta(z_1, 0, C) = \{(z_2, \varepsilon)\}$
- (5)  $\delta(z_2, 0, C) = \{(z_2, \varepsilon)\}$ .

Die Modifikationen aus Teilaufgabe (b) wird für (c) beibehalten.

- (a) Welche Sprache wird von dem Kellerautomaten erkannt?

- (b) Ersetze Transition (1) durch (1a)  $\delta(z_0, 0, \#) = \{(z_0, C)\}$ . Welche Sprache erkennt der Kellerautomat nach dieser Modifikation?

- (c) Füge zusätzlich Transition (6)  $\delta(z_1, 1, C) = \{(z_1, C)\}$  hinzu. Welche Sprache erkennt der Automat nun?



Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 6.** (6 Punkte) Gegeben sei die Grammatik  $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$  mit

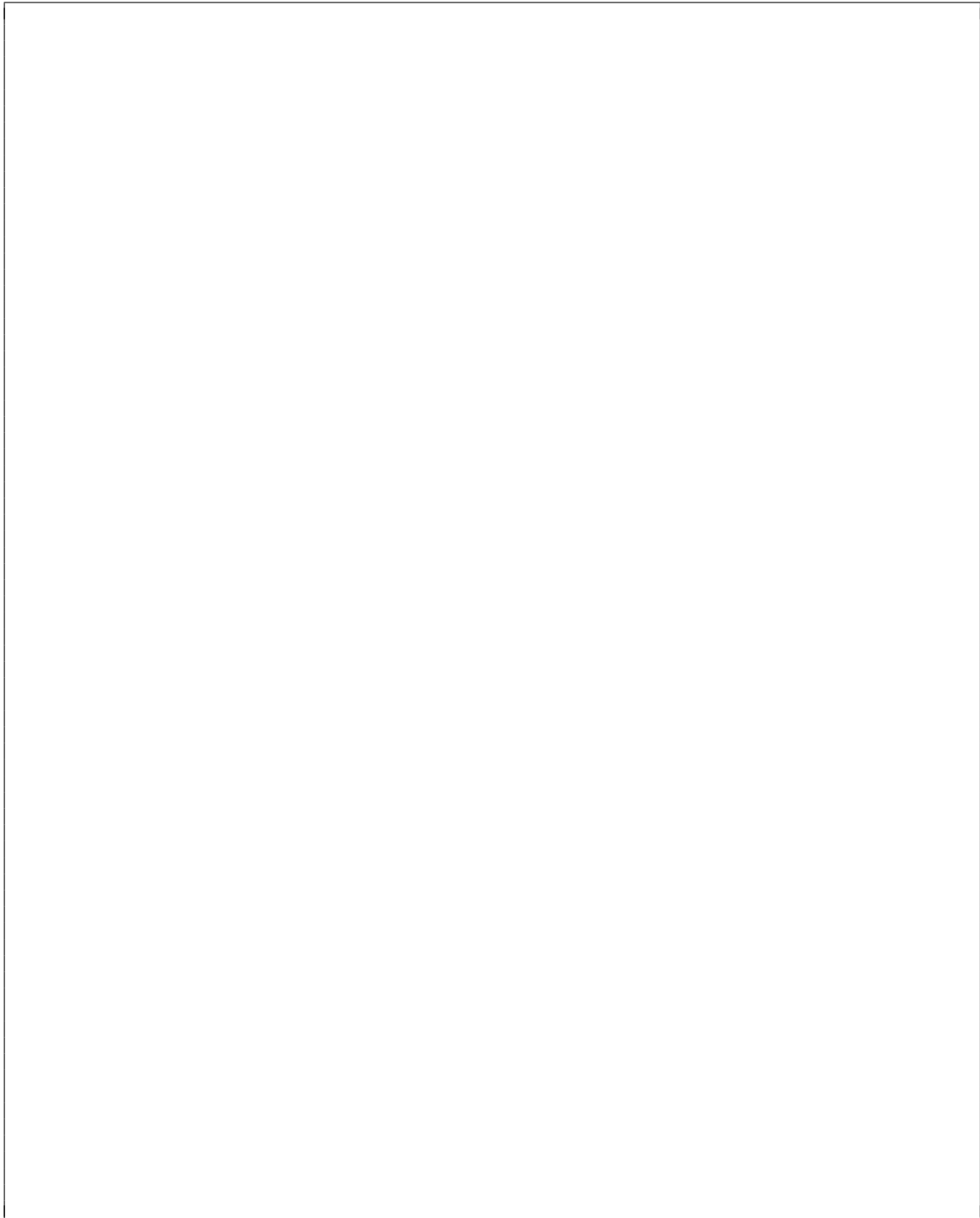
$$P : S \rightarrow AB \mid AC$$

$$A \rightarrow AB \mid BC \mid a$$

$$B \rightarrow BB \mid CA \mid b$$

$$C \rightarrow c.$$

Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort  $cacbb$  in  $L(G)$  enthalten ist.



Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 7.** (6 Punkte) Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ . Geben Sie für

$$L = \{a^n w a^n \mid n \geq 0, w \in \Sigma^*, |w| \text{ gerade}\}$$

eine kontextfreie Grammatik an.

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 8.** (6 Punkte) Sei  $M = (\{z_0, z_1, z_f\}, \{b, c\}, \{b, c, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_f\})$  eine deterministische Turingmaschine mit

$$\delta(z_1, b) = (z_0, b, R)$$

$$\delta(z_1, c) = (z_1, c, N)$$

$$\delta(z_0, c) = (z_1, c, R)$$

$$\delta(z_0, b) = (z_0, b, N)$$

$$\delta(z_1, \square) = (z_f, \square, N)$$

$$\delta(z_0, \square) = (z_0, \square, N)$$

- (a) Akzeptiert  $M$  das Wort  $w_1 = cbc$ ?  ja  nein  
(b) Akzeptiert  $M$  das Wort  $w_2 = cccbc$ ?  ja  nein  
(c) Welche Sprache akzeptiert  $M$ ?

Name: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 9.** (3 Punkte) Geben Sie an, welche partielle Funktion  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  das folgende WHILE-Programm berechnet (Eingabevariablen sind  $x_1$  und  $x_2$ , die Ausgabevariable ist  $x_1$ ):

```
 $x_2 := x_2 + x_1;$   
 $x_1 := x_1 - x_2;$   
 $x_3 := x_1 + 1;$   
WHILE  $x_1 \neq 0$  DO  
   $x_1 := x_1 - 1;$   
   $x_3 := x_2 + x_1$   
END;  
 $x_1 := x_3 + 4$ 
```

**Aufgabe 10.** (3 Punkte) Geben Sie an, welche Funktion von  $\mu f$  berechnet wird, wobei  $f: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  wie folgt definiert ist:

$$f(n, x, y) = 2x - n \cdot (y - 5)$$

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 11.** (5 Punkte (Bonus)) Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ . Gegeben sind die Sprachen

$$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält mindestens ein } b\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{b^{n^2} \mid n \geq 0\}.$$

Weiterhin sei

$$L_3 := L_1 L_2 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}.$$

Gilt  $L_3 = L_1$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.