Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey und Moses Ganardi

Algorithmen
WS 2014/15

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die schnelle Fouriertransformation auf einer PRAM mit $n^{O(1)}$ Prozessoren in Zeit $(\log n)^{O(1)}$ berechnet werden kann.

Aufgabe 2. Führen Sie für $s = 87$ und $t = 7$ Division mit Rest mit Hilfe des Newton-Verfahren durch.

Aufgabe 3. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit dem charakteristischen Polynom $\prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie für $m \in \mathbb{N}$, dass $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$ die mit Vielfachheiten gezählten Eigenwerte von A^m sind.

(b) Die *Spur* $\mathrm{tr}(A)$ einer quadratischen Matrix A ist die Summe ihrer Diagonaleinträge. Zeigen Sie $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ für $A \in \mathbb{C}^{n \times m}, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

(c) Folgern Sie aus (b), dass $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ gilt.

Hinweis: Nutzen Sie den folgenden Satz ohne Beweis.
Satz. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ mit den jeweiligen Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

(ii) Es existiert eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so dass $J = S^{-1}AS$ eine Blockdiagonalmatrix von der Form

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix} \text{ mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$$

ist.