Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey und Moses Ganardi

Algorithmen
WS 2014/15

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass das Vorzeichen einer Permutation wohldefiniert ist, d.h. jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist entweder nur als Produkt einer geraden Anzahl oder nur als Produkt einer ungeraden Anzahl von Transpositionen darstellbar.

(a) Seien $\tau_1 = (a, b) \neq \tau_2 = (c, d) \in S_n$ zwei Permutationen. Zeigen Sie, dass Permutationen $\tau_1', \tau_2' \in S_n$ existieren, so dass $\tau_1\tau_2 = \tau_1'\tau_2'$ und $\tau_2'(c) = c$.

(b) Folgern Sie, dass die Identität $\mathrm{id} \in S_n$ nur als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen darstellbar ist.

(c) Folgern Sie schließlich, dass das Vorzeichen einer Permutation $\sigma \in S_n$ wohldefiniert ist.

Aufgabe 2. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $V = \{1, \ldots, n\}$. Sei $T = (T_{u,v})_{1 \leq u,v \leq n}$ die Matrix definiert durch

$$T_{u,v} = \begin{cases} x_{u,v} & \text{falls } \{u, v\} \in E \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Angenommen G sei bipartit. Zeigen Sie, dass G genau dann ein perfektes Matching besitzt, wenn $\det(T) \neq 0$.

(b) Stimmt (a) auch, falls G nicht bipartit ist?

Aufgabe 3. Sei $f : \Sigma^* \to \mathbb{Z}^{2\times 2}$ der Homomorphismus definiert durch

$$f(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Einträge der Matrix $f(w)$ durch $F_{|w|+1}$ beschränkt sind.