

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Wiederholen Sie die Folien 250 – 278 im Skript und notieren Sie gegebenenfalls, an welchen Stellen Sie Schwierigkeiten haben.

Aufgabe 2 (Äquivalenzen modulo Ideal). Sei $I = (x^7 - 1, 31)$ das von $x^7 - 1$ und 31 erzeugte Ideal, $p_1 = 35x^{16} + 70x^8 + 70x^7 - 70x - 105$ und $p_2 = 2x^{11} - 2x^{10} + 42x^7 - 2x^4 - 2x^3 + 42$.

1. Berechnen Sie $p_1(x) \bmod I$ und $p_2(x) \bmod I$.
2. Berechnen Sie $p_1(x) \cdot p_2(x) \bmod I$.

Aufgabe 3. Gegeben seien die Ideale $I_1 = (x^2 - 1)$, $I_2 = (x^2 + 1)$, $I_3 = (x^3 - 1)$ von $\mathbb{Q}[X]$.

1. Betrachten Sie $R_i = \mathbb{Q}[X]/I_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Welche R_i sind ein Körper?
2. Sei K der *Zerfällungskörper* von $x^2 + 1$ (für die Definition von Zerfällungskörper siehe Skript, Folie 279). Betrachten Sie K als Vektorraum über \mathbb{Q} . Wie viele Dimensionen hat K ?

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, $K[X]$ der Polynomring über K in einer Variablen, sei $f \in K[X]$ und sei (f) das von f erzeugte Ideal. Zeigen Sie: $K[X]/(f)$ ist genau dann ein Körper, wenn f irreduzibel ist.

Aufgabe 5. Seien $k, t \geq 1$. Zeigen Sie:

$$\left| \left\{ (e_1, \dots, e_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^k e_i \leq t \right\} \right| = \binom{t+k}{k}.$$