Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 1

Lösung (Allgemeine Anmerkungen)
Axiom der Extensionalität: Seien X und Y Mengen. Dann gilt:

$$(\forall z.z \in X \Leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow X = Y$$

Das heißt, um zu beweisen, dass zwei Mengen gleich sind, können wir stattdessen beweisen, dass die Mengen auf $\in$ übereinstimmen. Oft ist es einfacher, $\Leftrightarrow$ in zwei Richtungen, $\Leftarrow$ und $\Rightarrow$, aufzuteilen. Wir können also auch zeigen:

$$(\forall z.z \in X \Rightarrow z \in Y) \wedge (\forall z.z \in X \Leftarrow z \in Y)$$

Die Kontraposition einer Implikation $\alpha \Rightarrow \beta$ ist $\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$. Beide sind äquivalent zueinander:

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$$

Mit $\perp$ bezeichnet man eine Aussage, die immer falsch ist. Es gilt also insbesondere für alle α, dass $\perp \Rightarrow \alpha$.

Aufgabe 1
Seien A, B und C Mengen. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
3. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Lösung

1.

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \land x \notin B \cup C \\
&\Leftrightarrow x \in A \land (x \notin B \land x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \land x \notin B) \land (x \in A \land x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \setminus B \land x \in A \setminus C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \land x \notin B \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in A \land (x \notin B \lor x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \land x \notin B) \lor (x \in A \land x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \setminus B \lor x \in A \setminus C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

1. $2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}}$
2. $2^{2^{\{1,2\}}}$
3. $\bigcup_{a \in \{2,4,6,8,10\}} \{\frac{a}{2}, 5 + \frac{a}{2}\}$
4. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, n+1, n+2\}$

Lösung

1.

$$\begin{aligned}
&2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}} \\
=&\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \setminus \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \\
=&\{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
2^{2^{\{1,2\}}} &= 2^{\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}} \\
&= \{\varnothing\} \\
&\cup \{\{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1,2\}\}\} \\
&\cup \{\{\varnothing, \{1\}\}, \{\varnothing, \{2\}\}, \{\varnothing, \{1,2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{1,2\}\}, \{\{2\}, \{1,2\}\}\} \\
&\cup \{\{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}, \{\varnothing, \{2\}, \{1,2\}\}, \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}\} \\
&\cup \{\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}\}
\end{aligned}$$

3. $\bigcup_{a\in\{2,4,6,8,10\}}\{\frac{a}{2}, 5+\frac{a}{2}\} = \{1,\dots,10\}$

4. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n, n+1, n+2\} = \mathbb{N}$

Aufgabe 3
Beweisen Sie:

1. Für alle Mengen A ist $\bigcup_{a\in A}\{a\} = A$.

2. $M_2 := \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\} = \varnothing$

3. $M_3 := \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\{x \in \mathbb{R} \mid |x-\pi| \leq |\varepsilon|\} = \{\pi\}$

Lösung

1. $x \in \bigcup_{a\in A}\{a\} \Leftrightarrow \exists a \in A. x \in \{a\} \Leftrightarrow \exists a \in A. x = a \Leftrightarrow x \in A$

2. $x \in \varnothing$ ist äquivalent zu $\bot$.

   $\Leftarrow$: $\bot \Rightarrow x \in M_2$ gilt trivialerweise.

   $\Rightarrow$: $x \in M_2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}. x \geq n \Rightarrow x \geq x+1 \Rightarrow \bot$.

3. **$\Leftarrow$:** $x \in \{\pi\} \Rightarrow \forall\varepsilon \in \mathbb{R}\setminus\{0\} |\underbrace{x-\pi}_{=0}| \leq |\epsilon| \Rightarrow x \in M_3$

   $\Rightarrow$: Wir zeigen statt $x \in M_3 \Rightarrow x \in \{\pi\}$ die Kontraposition: Sei $x \notin \{\pi\}$, also $x \neq \pi$. Daraus folgt, dass $|x-\pi| > \frac{|x-\pi|}{2}$. Somit gilt $\exists\varepsilon \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. |x-\pi| > \varepsilon \Leftrightarrow \neg\forall\varepsilon \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. |x-\pi| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \notin M_3$.

Aufgabe 4 Beweisen Sie:

1. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$

2. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$

Lösung

1.

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B &\Leftrightarrow x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \vee x \in B \\
&\Leftrightarrow (\forall i \in I. x \in A_i) \vee x \in B \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I. x \in A_i \vee x \in B \\
&\Leftrightarrow \forall i \in I. x \in A_i \cup B \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B &\Leftrightarrow x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \wedge x \in B \\
&\Leftrightarrow (\exists i \in I . x \in A_i) \wedge x \in B \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I . x \in A_i \wedge x \in B \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I . x \in A_i \cap B \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5
Seien A_1, A_2 und A_3 Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:
Ist $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, $A_1 \cap A_3 \neq \varnothing$ und $A_2 \cap A_3 \neq \varnothing$, so ist auch $\bigcap_{i\in\{1,2,3\}} A_i \neq \varnothing$.

Lösung
Sei $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$ und $A_3 = \{1, 3\}$. Dann gilt $A_1 \cap A_2 = \{2\}$, $A_1 \cap A_3 = \{1\}$ und $A_2 \cap A_3 = \{3\}$, aber $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$.