Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 2

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie, ob es sich bei den folgenden Relationen um Funktionen handelt. Geben Sie ggf. an, ob die Funktionen injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind. Geben Sie außerdem für die gefundenen Funktionen das Bild der Funktion an.

(a) $R_1 \subseteq (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$
$R_1 = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

(b) $R_2 \subseteq \big(\{0,1,2,3,4\} \times 2^{\{0,1,2,3,4\}}\big)$
$R_2 = \{(x, y) \mid y = \{4 - x\}\}$

(c) $R_3 \subseteq \big(\{0,1,2,3,4\} \times 2^{\{0,1,2,3,4\}}\big)$
$R_3 = \{(x, y) \mid y = \{x, 4 - x\}\}$

(d) $R_4 \subseteq (\{0,1,2,3,4\} \times \{0,1,2,3,4\})$
$R_4 = \{(x, y) \mid y \in \{x, 4 - x\}\}$

(e) $R_5 \subseteq (\mathbb{R} \times [-1, 1])$
$R_5 = \{(x, y) \mid y = \sin(x)\}$

(f) $R_6 \subseteq \big(\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}\big)$
$R_6 = \{(f, y) \mid y = f(10)\}$

(g) $R_7 \subseteq$ (Menschen $\times$ weibliche Vornamen)
$R_7 = \{(x, y) \mid y$ ist der erste Vorname der biologischen Mutter von $x\}$

(h) $R_8 \subseteq$ (Menschen $\times$ Himmelskörper)
$R_8 = \{(x, y) \mid x$ war auf $y\}$

Hinweise:

- $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $[-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ (Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$)

Aufgabe 2. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei $f : A \to B$ eine injektive Funktion. Dann gilt für alle $A_1, A_2 \subseteq A$: $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

(b) Sei $f : A \to B$ eine bijektive Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$ ebenfalls bijektiv.

Aufgabe 3. Geben Sie eine Bijektion von A nach B an.

(a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$

(b) A ist die Menge der natürlichen Zahlen, B ist die Menge der geraden natürlichen Zahlen

(c) A ist die Menge der geraden ganzen Zahlen, B ist die Menge der ungeraden ganzen Zahlen

(d) A ist die Menge der durch k teilbaren natürlichen Zahlen, B ist die Menge der durch m teilbaren natürlichen Zahlen

(e) $A = 2^{\mathbb{N}}$, $B = 2^{\mathbb{Z}}$

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gleichmächtig sind.