Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 2

Aufgabe 1
Bestimmen Sie, ob es sich bei den folgenden Relationen um Funktionen handelt. Geben Sie ggf. an, ob die Funktionen injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind. Geben Sie außerdem für die gefundenen Funktionen das Bild der Funktion an.

(a) $R_1 \subseteq (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$
$R_1 = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

(b) $R_2 \subseteq \left(\{0,1,2,3,4\} \times 2^{\{0,1,2,3,4\}}\right)$
$R_2 = \{(x, y) \mid y = \{4 - x\}\}$

(c) $R_3 \subseteq \left(\{0,1,2,3,4\} \times 2^{\{0,1,2,3,4\}}\right)$
$R_3 = \{(x, y) \mid y = \{x, 4 - x\}\}$

(d) $R_4 \subseteq (\{0,1,2,3,4\} \times \{0,1,2,3,4\})$
$R_4 = \{(x, y) \mid y \in \{x, 4 - x\}\}$

(e) $R_5 \subseteq (\mathbb{R} \times [-1, 1])$
$R_5 = \{(x, y) \mid y = \sin(x)\}$

(f) $R_6 \subseteq \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}\right)$
$R_6 = \{(f, y) \mid y = f(10)\}$

(g) $R_7 \subseteq$ (Menschen $\times$ weibliche Vornamen)
$R_7 = \{(x, y) \mid y$ ist der erste Vorname der biologischen Mutter von $x\}$

(h) $R_8 \subseteq$ (Menschen $\times$ Himmelskörper)
$R_8 = \{(x, y) \mid x$ war auf $y\}$

Hinweise:

- $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $[-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ (Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$)

Lösung
Anmerkung: Die Schreibweise $y = \ldots$ ist dafür hinreichend, dass es sich um eine Funktion handelt. Wenn eine Funktion surjektiv ist, so ist ihr Bild gleich dem Wertebereich. Eine Funktion ist bijektiv genau dann, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

(a) Funktion, injektiv, surjektiv

(b) Funktion, injektiv, nicht surjektiv, Bild: $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$

(c) Funktion, nicht injektiv (z.B. $(0, \{0, 4\}), (4, \{0, 4\}) \in R_4$), nicht surjektiv, Bild: $\{\{0, 4\}, \{1, 3\}, \{2\}\}$

(d) Keine Funktion (z.B. $(0, 0), (0, 4) \in R_4$)

(e) Funktion, nicht injektiv (z.B. $(0, 0), (2 * \pi, 0) \in R_5$), surjektiv

(f) Funktion, nicht injektiv (z.B. $(\mathrm{id}, 10), \lambda x.10, 10) \in R_6$), surjektiv

(g) Funktion, nicht injektiv (, surjektiv?)

(h) Keine Funktion (debattierbar)

Aufgabe 2 Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei $f : A \to B$ eine injektive Funktion. Dann gilt für alle $A_1, A_2 \subseteq A$: $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

(b) Sei $f : A \to B$ eine bijektive Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$ ebenfalls bijektiv.

Lösung

(a) **$\Leftarrow$:** $x \in f(A_1) \cap f(A_2) \Rightarrow \exists a_1 \in A_1, a_2 \in A_2.x = f(a_1) \wedge x = f(a_2) \Rightarrow \exists a \in A_1 \cap A_2.f(a) = x \Rightarrow x \in f(A_1 \cap A_2)$

$\Rightarrow$: $x \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow \exists a \in A_1 \cap A_2.x = f(a) \Rightarrow \exists a \in A_1.x = f(a) \wedge \exists a \in A_2.x = f(a) \Rightarrow x \in f(A_1) \cap f(A_2)$

(b) f^{-1} **injektiv:** $f^{-1}(x) = f^{-1}(y) \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(y)) \Rightarrow x = y$

f^{-1} **surjektiv:** $\forall a \in A.\exists b \in B.f(a) = b \Rightarrow \forall a \in A.\exists b.f^{-1}(b) = a.$

Aufgabe 3 Geben Sie eine Bijektion von A nach B an.

(a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$

(b) A ist die Menge der natürlichen Zahlen, B ist die Menge der geraden natürlichen Zahlen

(c) A ist die Menge der geraden ganzen Zahlen, B ist die Menge der ungeraden ganzen Zahlen

(d) A ist die Menge der durch k teilbaren natürlichen Zahlen, B ist die Menge der durch m teilbaren natürlichen Zahlen

(e) $A = 2^{\mathbb{N}}$, $B = 2^{\mathbb{Z}}$

Lösung

(a) $f(x) = \begin{cases} a & x = 1 \\ b & x = 2 \\ c & x = 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = 2 * x$

(c) $f(x) = x - 1$

(d) $f(x) = (x/k) * m$

(e) Zunächst ist eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & x \text{ gerade} \\ -(x+1)/2 & x \text{ ungerade} \end{cases}$$

Diese lässt sich erweitern zu einer Bijektion $g : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{Z}}$:

$$g(X) = \{y \mid x \in X \land f(x) = y\}$$

Aufgabe 4 Beweisen Sie, dass die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gleichmächtig sind.

Lösung
Seien $p_1, p_2, \ldots$ die unendlich vielen Primzahlen. Setze $f(\frac{a}{b}) = p_a^b$. Das angegebene f ist also eine injektive Abbildung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{N}$. Mit $g(n) = \frac{n}{1}$ erhalten wir eine injektive Abbildung von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Q}$. Nach dem Satz von Schröder-Bernstein folgt, dass es eine bijektive Funktion von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{N}$ gibt. Demnach sind beide Mengen gleichmächtig.