Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 3

Aufgabe 1
Sind die folgenden Aussagen im mathematischen Sinne wahr oder falsch?

1. Eine unüberdachte Straße ist genau dann nass, wenn es geregnet hat.
2. Wenn n eine Primzahl ist, dann ist n ungerade.
3. Wenn eine Wand gelb ist, dann ist sie gelb oder grün.
4. Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann ist 1=1.
5. Wenn 3=4 ist, dann ist 10=20.
6. Jede natürlich Zahl ist größer als 10 oder kleiner als 100.
7. Es ist 0=0 oder 1=1.

Lösung

1. Falsch, denn eine (unüberdachte) Straße kann auch aus anderen Gründen nass sein.
2. Falsch, da 2 eine Primzahl ist.
3. Richtig.
4. Richtig, da $1 = 1$ wahr ist.
5. Richtig, da aus etwas Falschem alles folgt.
6. Richtig, denn für alle $n > 10$ gilt $n > 10$ und für alle $n \leq 10$ gilt $n < 100$.
7. Richtig.

Aufgabe 2

1. Bestimmen Sie für die folgenden Relationen, ob diese reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv sind. Geben Sie außerdem an, ob es sich um eine Äquivalenzrelation und ob es sich um eine (lineare) partielle Ordnung handelt.

(a) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a < b\}$

(b) $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a|b\}$

(c) $R_3 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ ist Quadratzahl } \}$

(d) $R_4 = \{(A,B) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid A \subseteq B\}$

(e) Sei D die Menge aller Wörter, die im Duden stehen, dann ist $R_5 = \{(v,w) \in D \times D \mid v \text{ steht vor } w\}$

(f) Sei A eine Menge und $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq 2^A$ eine Partition von A, d.h.

- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.
- $\forall i \in I : A_i \neq \varnothing$.
- $\forall i,j \in I : i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.

Dann sei die Relation R_6 gegeben als $\{(a,b) \mid a,b \in A, \exists i \in I : a,b \in A_i\}$

2. Bestimmen Sie die folgenden Relationen:

(a) R_4^{-1}

(b) $R_2 \circ R_3$

Lösung

1. (a) Irreflexiv, antisymmetrisch, transitiv.

(b) Reflexiv, antisymmetrisch, transitiv, partielle Ordnung.

(c) Reflexiv, symmetrisch, transitiv, Äquivalenzrelation. Beweis der Transitivität: Seien $(a,b) \in R_3$ und $(b,c) \in R_3$. Also gibt es $d,e \in \mathbb{N}$ mit $a \cdot b = d^2$ und $b \cdot c = e^2$. Wir erhalten also $a \cdot c = d^2 \cdot e^2/b^2 = (d \cdot e/b)^2$. Für alle natürlichen Zahlen x,y,z mit $x = (y/z)^2$ gilt, dass y/z ebenso eine natürliche Zahl ist (ohne Beweis). Insgesamt erhalten wir, dass $d \cdot e/b$ eine natürliche Zahl ist, und somit ist $a \cdot c$ eine Quadratzahl.

(d) Reflexiv, antisymmetrisch, transitiv, partielle Ordnung.

(e) Irreflexiv, antisymmetrisch, transitiv.

(f) Reflexiv, symmetrisch, transitiv, Äquivalenzrelation.

2. (a) $R_4^{-1} = \{(A,B) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid B \subseteq A\}$

(b) $R_2 \circ R_3 = \{(a,c) \mid \exists b. a|b \wedge b \cdot c \text{ ist Quadratzahl } \} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Beweis: Seien $a,c \in \mathbb{N}$. Wähle $b = a \cdot a \cdot c$. Es gilt $a|a \cdot a \cdot c$ und $(a \cdot a \cdot c) \cdot c = (a \cdot c)^2$ ist Quadratzahl.

Aufgabe 3 Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Ist die Relation R eine Bijektion (also insbesondere eine Funktion), dann ist R^{-1} genau die Umkehrfunktion von R.

2. R ist transitiv genau dann, wenn $R \circ R \subseteq R$.

3. Wenn $f : B \to C$ und $g : A \to B$ injektiv sind, dann ist auch $f \circ g : A \to C$ injektiv.

Lösung

1. Sei R eine Bijektion, also insbesondere auch eine bijektive Funktion r mit der Eigenschaft $(a, b) \in R \Leftrightarrow r(a) = b$. Nach Definition gilt außerdem $(b, a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in R$ und $r(a) = b \Leftrightarrow r^{-1}(b) = a$.

2. $\Rightarrow$ Sei R transitiv und sei $(a, b) \in R \circ R$, d.h. $\exists c.(a, c) \in R \wedge (c, b) \in R$. Wegen der Transitivität von R gilt auch $(a, b) \in R$.

   $\Leftarrow$ Sei $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, also $(a, c) \in R \circ R$. Da nach Voraussetzung für alle x, y gilt, dass $(x, y) \in R \circ R \Rightarrow (x, y) \in R$, folgt insbesondere auch $(a, c) \in R$.

3. Sei $f(g(x)) = f(g(y))$. Aufgrund der Injektivität von f gilt, dass $g(x) = g(y)$. Ebenso folgt wegen Injektivität von g, dass $x = y$.