Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der folgenden Relationen:

1. $R_1 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
   $R_1 = \{(a, b) \mid 5|(a - b)\}$

2. $R_2 \subseteq$ Menschen in Deutschland $\times$ Menschen in Deutschland
   $R_2 = \{(a, b) \mid a$ und b wohnen im selben Bundesland$\}$

Aufgabe 2 Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

1. Sei A eine Menge mit n Elementen. Dann hat die Potenzmenge 2^A genau 2^n Elemente.
2. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$
3. $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$
4. $3|(n^3 - n)$

Aufgabe 3 Im Folgenden wird mittels vollständiger Induktion bewiesen, dass in einer Gruppe mit n Menschen alle dieselbe Augenfarbe haben. Finden Sie den Fehler im Beweis.

Induktionsanfang ($n = 1$) In einer Gruppe mit einem Mensch haben offensichtlich alle dieselbe Augenfarbe.

Induktionsschritt ($n > 1$) Wir nehmen an, dass alle Menschen in einer Gruppe der Größe n dieselbe Augenfarbe haben und beweisen, dass die Aussage dann auch für Gruppen der Größe $n + 1$ gilt.

Dazu nummerieren wir die $n+1$ Menschen beliebig durch. Nach Induktionsvoraussetzung hat die Gruppe bestehend aus den Menschen mit den Nummern 1 bis n dieselbe Augenfarbe. Das Gleiche gilt für die Gruppe bestehend aus den Menschen mit den Nummern 2 bis $n + 1$. Zu beiden Mengen gehört zum Beispiel der Mensch mit der Nummer 2. Folglich haben alle $n + 1$ Menschen dieselbe Augenfarbe.