Übungsblatt 4

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der folgenden Relationen:

1. $R_1 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
   $R_1 = \{(a,b) \mid 5|(a-b)\}$

2. $R_2 \subseteq$ Menschen in Deutschland $\times$ Menschen in Deutschland
   $R_2 = \{(a,b) \mid a$ und b wohnen im selben Bundesland$\}$

Lösung

1. $\{z \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z}. z = x + 5 * y\}$ für $x = 0, \ldots, 4$

2. $\{x \mid x$ wohnt in Bundesland $B\}$ für alle Bundesländer B

Aufgabe 2 Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

1. Sei A eine Menge mit n Elementen. Dann hat die Potenzmenge 2^A genau 2^n Elemente.

2. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$

3. $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

4. $3|(n^3-n)$

Lösung

1. **$n = 0$:** $|2^{\varnothing}| = |\{\varnothing\}| = 1 = 2^0$

   $n \to n+1$: Sei $|A| = n+1$, also $A = A' \uplus \{x\}$ mit $|A'| = n$. Wir können $2^{A' \uplus \{x\}}$ schreiben als $2^{A'} \uplus \{M \cup \{x\} \mid M \in 2^{A'}\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt, dass $|2^{A'}| = 2^n$. Insgesamt folgt, dass $|2^A| = 2^{n+1}$.

2. **$n = 0$:** $\sum_{k=1}^{0}(2k-1)^2 = 0 = \frac{0\cdot(2\cdot 0-1)\cdot(2\cdot 0+1)}{3}$

$n \to n+1$**:**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2\right) + (2(n+1)-1)^2 \\
&= \frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \\
&= \frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1) + 3\cdot(2n+1)^2}{3} \\
&= \frac{n\cdot(4n^2-1) + 3\cdot(2n+1)^2}{3} \\
&= \frac{4n^3 - n + 12n^2 + 12n + 3}{3} \\
&= \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n + 6n^2 + 9n + 3}{3} \\
&= \frac{(2n^2+3n+1)(2n+3)}{3} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)}{3} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(2(n+1)-1)\cdot(2(n+1)+1)}{3}
\end{aligned}$$

3. $n = 0$**:** $\sum_{k=1}^{2^0-1}\frac{1}{k} = 0 \geq 0 = \frac{0}{2}$

   $n \to n+1$**:**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k} &= \left(\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k}\right) + \left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k}\right) \\
&\geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k} \\
&\geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} \\
&= \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

4. $n = 0$**:** $3|0$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} 3|((n+1)^3 - (n+1)) &\Leftrightarrow 3|(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1) \\ &\Leftrightarrow 3|(n^3 - n + 3(n^2 + n)) \\ &\Leftarrow 3|(n^3 - n) \wedge 3|(3(n^2 + n)) \end{aligned}$$

Aufgabe 3 Im Folgenden wird mittels vollständiger Induktion bewiesen, dass in einer Gruppe mit n Menschen alle dieselbe Augenfarbe haben. Finden Sie den Fehler im Beweis.

Induktionsanfang ($n = 1$) In einer Gruppe mit einem Mensch haben offensichtlich alle dieselbe Augenfarbe.

Induktionsschritt ($n > 1$) Wir nehmen an, dass alle Menschen in einer Gruppe der Größe n dieselbe Augenfarbe haben und beweisen, dass die Aussage dann auch für Gruppen der Größe $n + 1$ gilt.

Dazu nummerieren wir die $n+1$ Menschen beliebig durch. Nach Induktionsvoraussetzung hat die Gruppe bestehend aus den Menschen mit den Nummern 1 bis n dieselbe Augenfarbe. Das Gleiche gilt für die Gruppe bestehend aus den Menschen mit den Nummern 2 bis $n + 1$. Zu beiden Mengen gehört zum Beispiel der Mensch mit der Nummer 2. Folglich haben alle $n + 1$ Menschen dieselbe Augenfarbe.

Lösung

Betrachte den Fall mit zwei Menschen, 1 und 2. Teilen wir die Menge $\{1, 2\}$ in die zwei einelementigen Mengen $\{1\}$ und $\{2\}$ auf, so gehört 2 nicht zu beiden Mengen.