Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

1. Bestimmen Sie die Menge aller möglichen Wörter der Länge n über einem Alphabet mit k Buchstaben.
2. An einem Marathon nehmen 20 Läufer teil. In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen können die Läufer das Ziel erreichen?
3. Wie viele verschiedene mögliche Zahlenkombinationen können bei einer Lottoziehung (6 aus 49) gezogen werden?
4. Wie viele verschiedene Notenverteilungen können entstehen, wenn bei einer Klausur 20 Studenten mitschreiben?
5. Aus einer Schulklasse von 23 Schülern soll eine Gruppe von 5 Schülern zum Direktor geschickt werden. Auf wie viele Arten kann diese Abordnung gebildet werden?
6. In einem Zimmer gibt es 5 Lampen, die unabhängig voneinander aus- und eingeschaltet werden können. Wie viele Arten der Beleuchtung gibt es insgesamt?
7. In einer Liga spielen 7 Mannschaften. Wie viele mögliche Tabellenkonstellationen gibt es?
8. Wie viele natürliche Zahlen können als Produkt von 10 Faktoren aus den Zahlen 1,2,3 und 4 dargestellt werden?

Lösung

1. Mit Zurücklegen und Berücksichtigung der Reihenfolge: k^n
2. Ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge: 20!
3. Ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: $\binom{49}{6}$
4. Mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: Eine Notenverteilung gibt an, wie oft eine bestimmte Note erreicht wurde. Wir nehmen an, es gibt die Noten $1, 2, 3, 4, 5$. Dann gibt es $\binom{5+20-1}{20}$ Notenverteilungen.

5. Ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: $\binom{23}{5}$

6. Mit Zurücklegen und Berücksichtigung der Reihenfolge. Es gibt zwei Zustände für jede Lampe: 2^5

7. Ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge: 7!

8. Mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: $\binom{4+10-1}{10}$.
   Problem: Wir zählen Produkte doppelt, die dieselbe natürliche Zahl ergeben, aber aus unterschiedlichen Faktoren bestehen, z.B. $4 \cdot 1 = 2 \cdot 2$. Andere Idee: Jede natürliche Zahl n, die nur aus Faktoren $1, \ldots, 4$ besteht, also $n = 1^i 2^j 3^k 4^l$, kann höchstens 2 und 3 als Primfaktoren haben. Wir haben also $n = 2^m 3^k$, wobei $m = 2l + j$ und $i + k + m = 10$ oder $k + m \leq 10$. Es gibt insgesamt 21 Möglichkeiten für m ($m = 0, \ldots, 20$). Gehen wir jede einzeln durch, so ergeben sich jeweils die Möglichkeiten für k.

   $m = 0$: 11 Möglichkeiten für k ($k = 0, \ldots, 10$)

   $m = 1$: Ein Faktor muss nun eine 2 sein, also 10 Möglichkeiten für k, ($k = 0, \ldots, 9$).

   $m = 2$: Ein Faktor muss nun eine 4 sein oder zwei Faktoren müssen eine 2 sein, also wieder 10 Möglichkeiten für k.

   $m = 3$: 9 Möglichkeiten für k.

   $m = 4$: 9 Möglichkeiten für k.

   ...

   $m = 19$: 1 Möglichkeit für k ($k = 0$).

   $m = 20$: 1 Möglichkeit für k ($k = 0$).

   Wir erhalten also insgesamt $11 + 2\sum_{i=1}^{10} i = 11 + 2\frac{10 \cdot 11}{2} = 121$

Aufgabe 2

1. Bestimmen Sie $\binom{6}{2}$.

2. Bestimmen Sie $\binom{n}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

3. Zeigen Sie, dass für $n, k \in \mathbb{N}$ die Gleichung $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ gilt.

Lösung

1. $\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

2. $\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

3.

$$
\begin{aligned}
k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(k-1)!} \\
&= n\frac{(n-1)!}{(n-k)!\cdot(k-1)!} = n\frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!\cdot(k-1)!} \\
&= n\binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j} = 2^{n+1} - 1$$

Lösung
In der Vorlesung wurde bewiesen, dass $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$. Wir erhalten also:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} 2^i$$

Wir zeigen nun per Induktion, dass die gewünschte Gleichung gilt:

$n = 0$**:** $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 = 2 - 1 = 2^{0+1} - 1$

$n \to n+1$**:** $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \left(\sum_{i=0}^{n} 2^i\right) + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$