Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Diskrete Mathematik für Informatiker
WS 2015/2016

Übungsblatt 6

Aufgabe 1

1. Lösen Sie die folgende Gleichung mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 8$.

2. Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

Lösung

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$, also $x = 1$.

2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1 - 1)^n = 0$

Aufgabe 2 Zeichnen Sie die folgenden Graphen planar:

(a) K_4

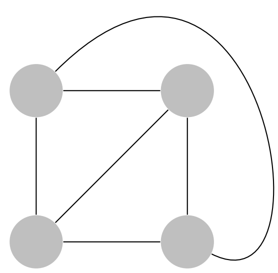
(b) $K_{2,4}$

(c) C_5

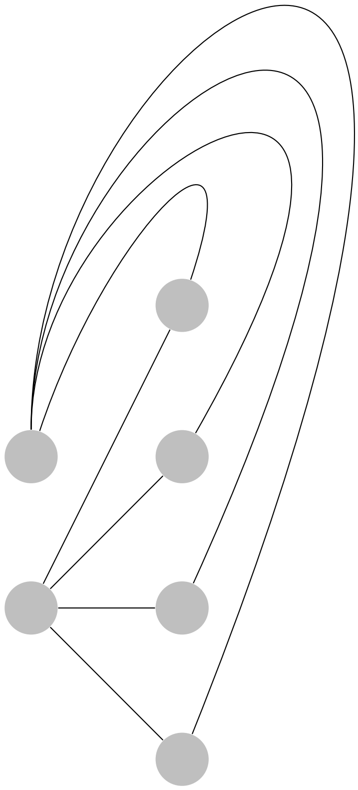
(d) P_5

Lösung

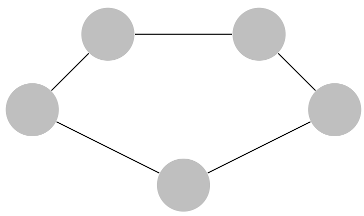
(a)



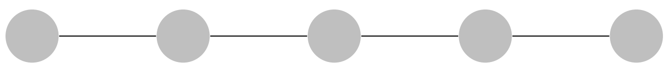
(b)



(c)



(d)



Aufgabe 3 Gegeben ein ungerichteter Graph
$G = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\})$.

(a) Zeichnen Sie G.

(b) Bestimmen Sie $G \setminus 3$

(c) Bestimmen Sie $G \setminus \{1, 2\}$

(d) Bestimmen Sie $G[1, 2, 5]$

(e) Geben Sie die Nachbarschaft der Knoten 2 und 4 an!

(f) Geben Sie den Grad aller Knoten an!

(g) Bestimmen Sie einen Weg der Länge 3 vom Knoten 1 zum Knoten 3.

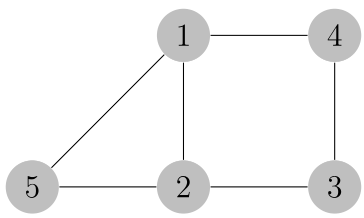
(h) Ist G zusammenhängend?

(i) Ist G bipartit?

(j) Ist G planar? (Geben sie ggf. eine planare Zeichnung an!)

Lösung

(a)



(b) $G \setminus 3 = (\{1, 2, 4, 5\}, \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}\})$

(c) $G \setminus \{1, 2\} = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\})$

(d) $G[1, 2, 5] = (\{1, 2, 5\}, \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}\})$

(e) $N_G(2) = \{1, 3, 5\}$, $N_G(4) = \{1, 3\}$, $N_G(2) \cup N_G(4) = \{1, 3, 5\}$

(f) $d_G(1) = 3$, $d_G(2) = 3$, $d_G(3) = 2$, $d_G(4) = 2$, $d_G(5) = 2$

(g) $[1, 2, 3]$

(h) Ja.

(i) Nein, da ein Dreieck schon nicht bipartit ist.

(j) Ja.

Aufgabe 4 Seien $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen und $f : V_1 \to V_2$ so, dass $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2$. Sind die folgenden Behauptungen richtig oder falsch?

1. Sind G_1 und G_2 isomorph und ist G_1 planar, so ist auch G_2 planar.

2. Ist f injektiv und ist G_1 planar, so ist auch G_2 planar.

3. Ist f surjektiv und ist G_1 planar, so ist auch G_2 planar.

Lösung

1. Folgt aus 3, da es für isomorphe Graphen eine bijektive Abbildung der Knoten mit der geforderten Eigenschaft gibt.

2. Offensichtlich lässt sich P_2 so auf $K_{3,3}$ abbilden, dass die geforderte Eigenschaft erfüllt ist, aber $K_{3,3}$ ist nicht planar.

3. Da f surjektiv ist, gibt es für jedes $v \in V_2$ eine nicht leere Urbildmenge unter f. Aus dieser Menge wählen wir einen Knoten aus, den wir mit $g(v)$ bezeichnen. Es gilt $\{g(v_1), g(v_2)\} \in E_1 \Leftrightarrow \{v_1, v_2\} \in E_2$ und g ist injektiv. Des Weiteren ist G_1 planar, also gibt es eine planare Einbettung (p_1, l_1). Eine planare Einbettung (p_2, l_2) für G_2 definieren wir wie folgt: $p_2(v) = p_1(g(v))$ und $l_2(v_1, v_2) = l_1(g(v_1), g(v_2))$.

   p_2 ist injektiv, da g und p_1 injektiv sind. Seien $u, v, x, y \in V_2$. Es gilt $l_2(u, v) \setminus \{p_2(u), p_2(v)\} \cap l_2(x, y) = l_1(g(u), g(v)) \setminus \{p_1(g(u)), p_1(g(v))\} \cap l_1(g(x), g(y)) = \varnothing$.

Aufgabe 5 Beweisen Sie, dass jeder ungerichtete Graph $G = (V, E)$ $(|V| \geq 2)$ mindestens 2 Knoten mit gleichem Grad hat!

Lösung
Jeder Knoten $v \in V$ hat einen Grad $0 \leq d_G(v) \leq |V| - 1$. Damit alle Knoten unterschiedlichen Grad haben, muss also insbesondere ein Knoten v_1 mit $d_G(v_1) = 0$ und ein Knoten v_2 mit $d_G(v_2) = |V| - 1$ existieren. Wegen $d_G(v_2) = |V| - 1$ muss $\{v_1, v_2\} \in E$ gelten, aber wegen $d_G(v_1) = 0$ muss $\{v_1, v_2\} \notin E$ gelten, was ein Widerspruch ist.

Aufgabe 6 Wie viele Graphen mit n Knoten gibt es?

Lösung
Ein (einfacher, ungerichteter) Graph mit n Knoten kann höchstens $e_n = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Kanten besitzen. Wir erhalten also insgesamt 2^{e_n} Graphen mit n Knoten.

Aufgabe 7 Beweisen Sie: C_n ist bipartit genau dann, wenn n gerade ist.

Lösung
Wir schreiben C_n als Pfad $[v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}]$, wobei $v_1 = v_{n+1}$. Damit C_n bipartit ist, muss es eine Partition $V = A \uplus B$ so geben, dass für alle $1 \leq i \leq n$ gilt: $v_i \in A \Leftrightarrow v_{i+1} \in B$.

n **gerade:** Dann ist $V_g = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n, i \text{ gerade}\}$ und $V_u = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n, i \text{ ungerade}\}$ eine Partition mit der gewünschten Eigenschaft. Insbesondere ist $v_n \in V_g$ und $v_1 \in V_u$.

n **ungerade:** Sei $A \uplus B$ eine Partition mit der gewünschten Eigenschaft. Sei $v_1 \in A$ ($v_1 \in B$ verläuft analog). Dann muss $v_2 \in B$ sein, $v_3 \in A$, usw. Wir erhalten also, dass $v_n \in A$, was ein Widerspruch ist.