Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Diskrete Mathematik für Informatiker
WS 2015/2016

---

# Übungsblatt 7

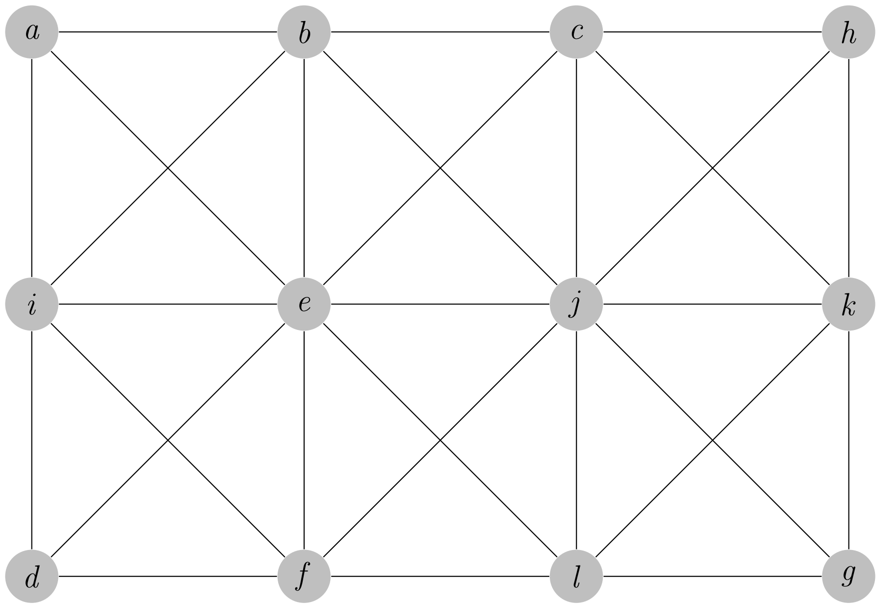
**Aufgabe 1** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. $\chi(K_n) = n$
2. $\chi(K_{m,n}) = 2$
3. $\chi(P_n) = 2$
4. Falls $n$ gerade: $\chi(C_n) = 2$, falls $n$ ungerade: $\chi(C_n) = 3$

**Lösung**

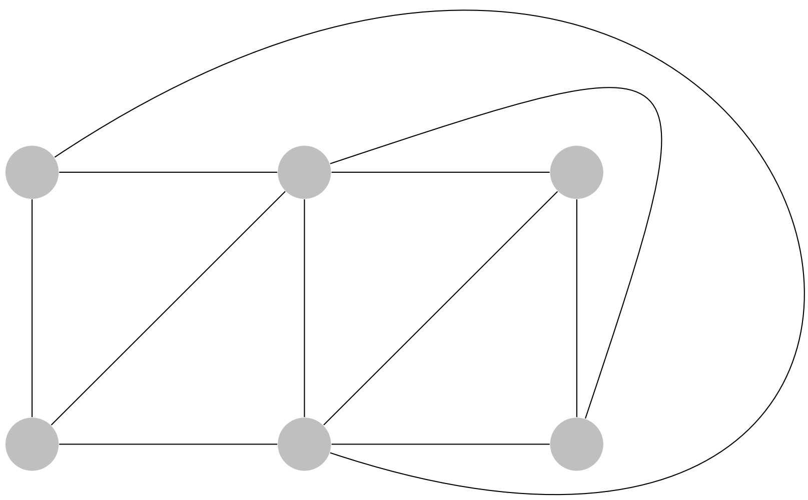
1. Es gilt $\Delta(K_n) = n - 1$, woraus $\chi(K_n) \leq n$ folgt. Wenn wir annehmen, dass $\chi(K_n) < n$ ist, dann müssen zwei Knoten dieselbe Farbe haben. Dies ist aber nicht zulässig, da alle Knoten miteinander verbunden sind.
2. Für alle Graphen $G = (V, E)$ mit $E \neq \varnothing$ gilt $\chi(G) \geq 2$, also auch $\chi(K_{m,n}) \geq 2$. $K_{m,n}$ lässt sich färben, indem jede der zwei Partitionen eine Farbe erhält.
3. Es gilt wieder $\chi(P_n) \geq 2$. Der Graph lässt sich färben, indem die Farben abwechselnd vergeben werden.
4. Erneut gilt $\chi(C_n) \geq 2$. Für gerade $n$ lässt sich der Graph färben, indem die Farben abwechselnd vergeben werden. Wir erhalten aus $\Delta(C_n) = 2$, dass $\chi(C_n) \leq 3$. Für ungerade $n$ gilt $\chi(C_n) = 3$, denn: Sei $C_n = [v_1, \ldots, v_n, v_1]$. Dann müssen wir abwechselnd Farben bis $v_n$ vergeben, aber $v_n$ und $v_1$ haben nun dieselbe Farbe.

**Aufgabe 2** Sei $G_{n,m}$ der Graph bestehend aus $n \cdot m$ Quadraten, wobei jeweils $n$ Quadrate untereinander und $m$ Quadrate nebeneinander liegen. Zusätzlich sind die beiden diagonal gegenüber liegenden Punkte in einem Quadrat miteinander verbunden. Z.B ist $G_{3,2}$=

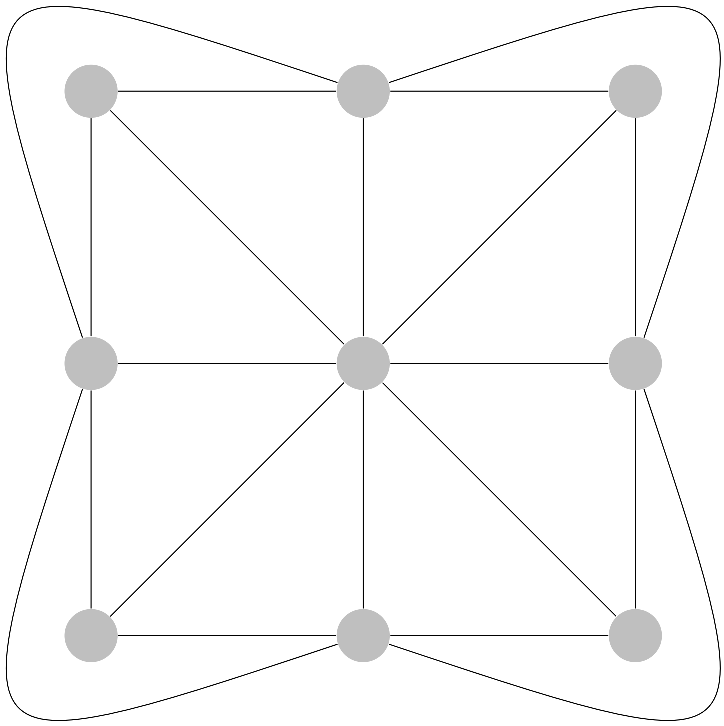



Bestimmen Sie, welche der $G_{n,m}$ planar sind. Tipp: Untersuchen Sie zunächst $G_{1,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, anschließend $G_{2,2}$ und schließlich alle anderen $G_{n,m}$.

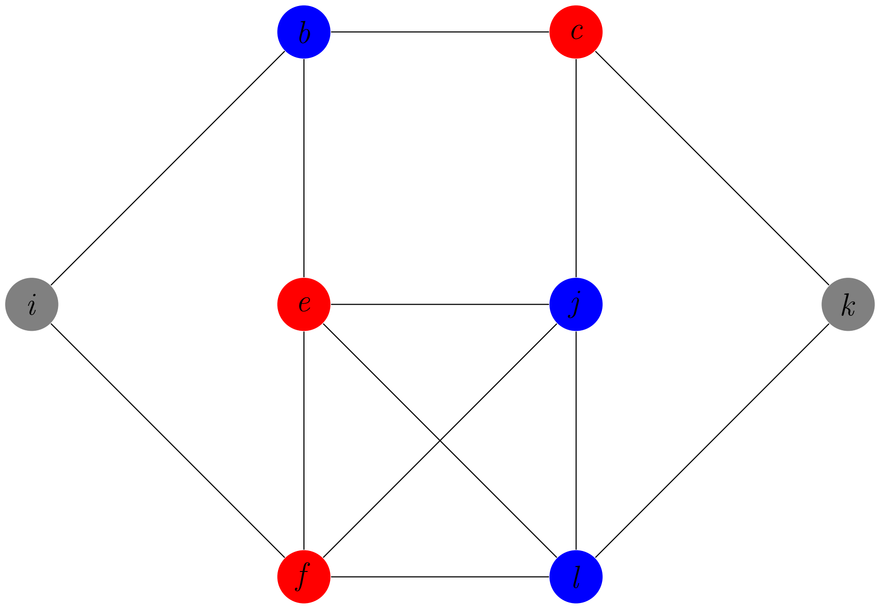
**Lösung**
Alle $G_{1,n}$ bzw. $G_{m,1}$ lassen sich planar zeichnen, z.B. $G_{2,1}$:



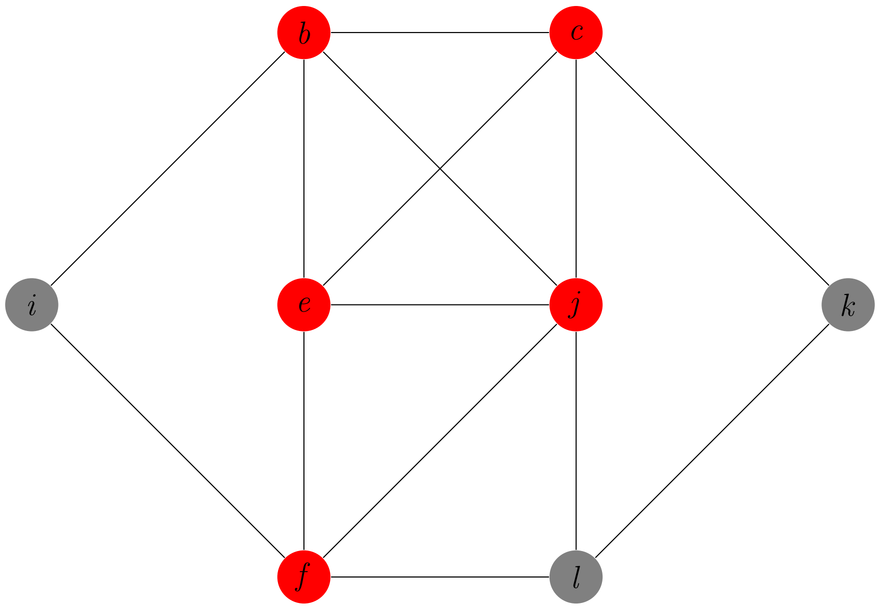
$G_{2,2}$ lässt sich planar zeichnen:



Der abgebildete Graph, $G_{3,2}$, ist hingegen nicht planar, da er eine Unterteilung des $K_{3,3}$ enthält. Wir bilden zunächst den Teilgraph $G_{3,2} \setminus \{a, h, d, g\}$. Danach entfernen wir die Kanten $\{i, e\}$, $\{k, j\}$, $\{b, j\}$ und $\{e, c\}$ und erhalten:



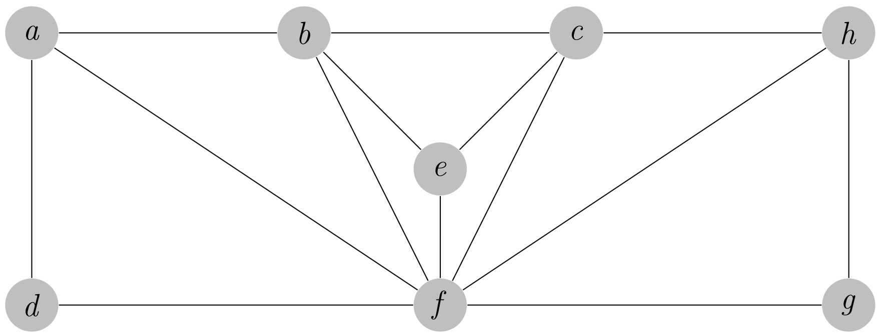

Dies ist eine Unterteilung des $K_{3,3}$, den man durch Entfernen von $i$ und $k$ und Einfügen der Kanten $\{b, f\}$ und $\{c, l\}$ erhält. $\{b, j, l\}$ und $\{c, e, f\}$ sind hierbei die beiden Partitionen.
Alternativ kann auch eine Unterteilung des $K_5$ angegeben werden:




**Aufgabe 3** Sei $G$ ein Baum mit 6 Knoten. Wie viele Blätter kann $G$ enthalten?

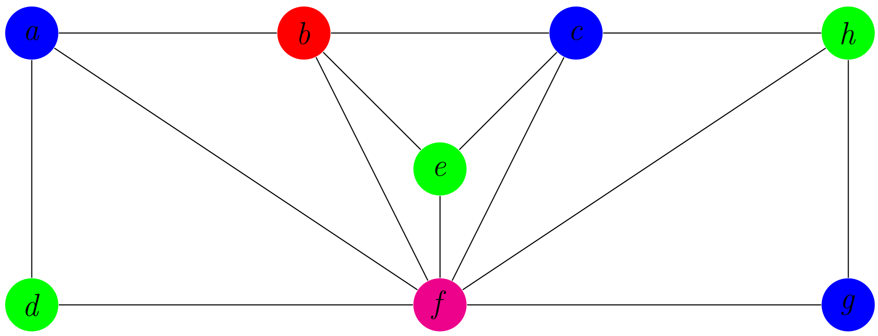
**Lösung**
$G$ enthält mindestens 2 Blätter (wenn $G = P_6$) und höchstens 5 Blätter (wenn $G = K_{1,5}$).

**Aufgabe 4** Gegeben sei folgender Graph $G$:




Bestimmen Sie $\chi(G)$ und geben Sie eine 4-Färbung an.

**Lösung**
$\chi(G)$ ist höchstens 4, da $G$ endlich und planar ist. $G[b, c, e, f]$ ist isomorph zu $K_4$, also ist $\chi(G) \geq 4$. Insgesamt ist $\chi(G) = 4$. Mögliche Färbung:




**Aufgabe 5** Beweisen Sie: Für einen Graphen mit $m$ Kanten gilt

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

Hinweis: Nehmen Sie an, ihr Graph hat $\chi(G)$ Farbklassen. Was können Sie dann für die Anzahl der Kanten zwischen den Farbklassen folgern?

**Lösung**
Zwischen zwei Farbklassen muss es mindestens eine Kante geben, also $m \geq \sum_{i=1}^{\chi(G)-1} i = \frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2}$. Durch Umstellen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\chi(G)\,(\chi(G)-1) \leq 2m \\
\Leftrightarrow &\chi(G)^2 - \chi(G) \leq 2m \\
\Leftrightarrow &\chi(G)^2 - \chi(G) + \frac{1}{4} \leq 2m + \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow &\left(\chi(G) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 2m + \frac{1}{4} \\
\Rightarrow &\chi(G) - \frac{1}{2} \leq \sqrt{2m + \frac{1}{4}} \\
\Leftrightarrow &\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 6** Wie viele Kreise der Länge $r$ enthält der vollständige Graph $K_n$?

**Lösung**
Idee: Es kommt nur darauf an, wie viele Möglichkeiten es gibt, $r$ Knoten auszuwählen, da alle Knoten miteinander verbunden sind. Hierbei ist die Reihenfolge egal, da wir alle Kreise mit derselben Knotenmenge identifizieren. Wir erhalten also $\binom{n}{r}$ verschiedene echte Kreise der Länge $r$, falls $r \leq n$, ansonsten 0.

**Aufgabe 7** Beweisen Sie: Ist $G = (V, E)$ ein Baum mit $|V| \geq 2$, so hat jeder Knoten $v$ den Grad $d_G(v) \geq 1$ und für die Summe aller Knotengrade gilt $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2(|V| - 1)$. Gilt auch die Rückrichtung dieser Aussage?

**Lösung**
Da ein Baum zusammenhängend ist, gilt $d_G(v) \geq 1$ wegen $|V| \geq 2$. Induktion über $|V|$:

**$|V| = 2$:** $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 = 2(|V| - 1)$

**$|V| \to |V| + 1$:** Sei $G' = (V', E')$ mit $V = V' \uplus \{x\}$ und $E' \subseteq E$. Wir müssen zeigen, dass es genau ein $x' \in V'$ gibt mit $\{x, x'\} \in E$. Wäre $E = E'$, so wäre $G$ nicht zusammenhängend. Gäbe es zwei neue Kanten $E = E' \uplus \{\{x', x\}, \{x'', x\}\}$, so wäre $G$ kein Baum, da es einen Pfad von $[x', \ldots, x'']$ in $G'$ gibt, da $G'$ zusammenhängend ist, und wir einen Kreis $[x, x', \ldots, x'', x]$ erhalten. Insgesamt gilt also

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 + \sum_{v \in V'} d'_G(v) = 2(|V'| - 1) = 2 + 2(|V| - 1 - 1) = 2(|V| - 1)$$

Die Rückrichtung der Aussage gilt nicht, denn die Gleichung gilt z.B. auch für den Graph, der aus einem Dreieck und einem einzelnen Knoten besteht: Sei $C_3 = (V, E)$. Dann ist $G = (V', E)$ mit $V' = V \cup \{4\}$ ein Graph mit $2(|V'| - 1) = 2(4 - 1) = 6$ und $\sum_{v \in V'} d_G(v) = 6$.