Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Diskrete Mathematik für Informatiker
WS 2015/2016

Übungsblatt 8

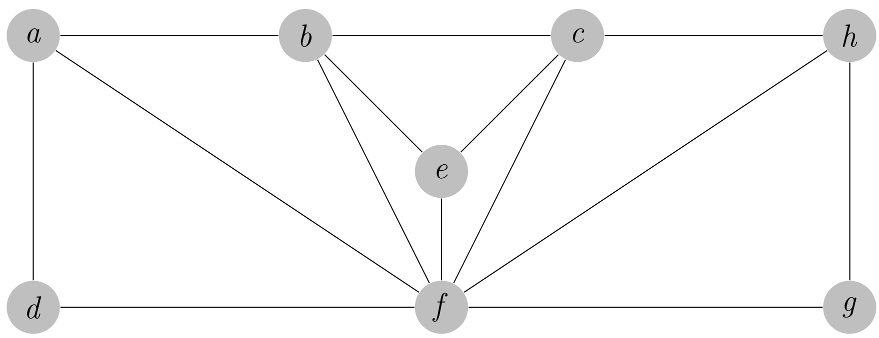
Aufgabe 1 Beweisen Sie:
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und sei jeder Knoten $v \in V$ vom Grad höchstens 2 ($\forall v \in V: \ d_G(v) \leq 2$). Dann ist G entweder ein einzelner Knoten, der P_n oder der C_n.
Hinweis: Versuchen Sie vollständige Induktion über die Anzahl der Kanten.

Lösung
$|E| = 0$: Da $|V| \geq 1$ und G zusammenhängend ist, muss $|V| = 1$ gelten.

$|E| = 1$: G kann nur P_2 sein.

$|E| > 1$: jei $G' = (V', E')$ mit $E' = E \uplus \{v_i, v_j\}$ und $V' \subseteq V$. Nach Induktionsvoraussetzung ist G' entweder ein P_n oder ein C_n. Letzteres ist nicht möglich, da G einen Knoten mit Grad 3 hätte. Also muss G' ein P_n sein. Erweitert man einen P_n so um eine Kante, dass alle Knoten höchstens Grad 2 haben, so erhält man entweder P_{n+1} oder C_n.

Aufgabe 2 Gegeben folgender Graph
und das Matching $M = \{\{h, f\}, \{c, e\}, \{a, d\}\}$:



(a) Ist M maximal/perfekt?

(b) Finden Sie einen erweiternden Weg, der die Kanten $\{h, f\}$ und $\{c, e\}$ enthält?

(c) Geben Sie ggf. das aus dem resultierenden Weg entstehende Matching an. Ist dieses Matching maximal/perfekt?

Lösung

(a) M ist maximal, da sich keine Kante mehr hinzufügen lässt, aber nicht perfekt, da $b, g \notin M$.

(b) $[g, h, f, c, e, b]$

(c) $(M \cup \{\{g, h\}, \{f, c\}, \{e, b\}\}) \setminus \{\{c, e\}, \{h, f\}\} = \{\{a, d\}, \{g, h\}, \{f, c\}, \{e, b\}\}$
Das resultierende Matching ist perfekt.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die Anzahl der perfekten Matchings im bipartiten Graphen $K_{n,n}$ und im vollständigen Graphen K_{2n}.

Lösung
$K_{n,n}$ besitzt $n!$ perfekte Matchings. K_{2n} besitzt $\prod_{i=1}^{n} 2i - 1$ perfekte Matchings.

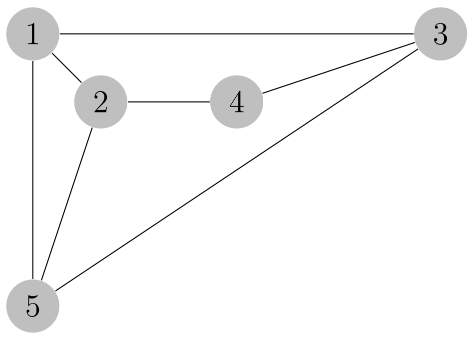
Aufgabe 4 Zeichnen Sie den Graph
$G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$.

(a) Enthält G einen Eulerweg / Eulerkreis?

(b) Sei $G' = (V \cup \{6\}, E \cup \{\{1, 6\}, \{2, 6\}\})$.
Enthält G' einen Eulerweg / Eulerkreis?

(c) Sei $G'' = (V \cup \{6, 7\}, E \cup \{\{1, 6\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 7\}\})$.
Enthält G'' einen Eulerweg / Eulerkreis?

Lösung



(a) Kein Eulerweg und kein Eulerkreis, da $d_u = 4$.

(b) Eulerweg $[5, 2, 1, 6, 2, 4, 3, 5, 1, 3]$, aber kein Eulerkreis, da $d_u = 2$.

(c) Eulerweg $[5, 2, 1, 6, 2, 4, 3, 5, 1, 3, 7, 4]$, aber kein Eulerkreis, da $d_u = 2$.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie ein Kriterium, so dass ein Graph $G = (V, E)$ einen Eulerweg, aber keinen Eulerkreis hat.

Lösung
$d_u = 2$

Aufgabe 6 Beweisen oder widerlegen Sie: In jedem Graph $G = (V, E)$ mit Eulerkreis gibt es eine Menge von echten Kreisen, so dass jede Kante $e \in E$ in genau einem dieser Kreise liegt.

Lösung
Induktion über die Anzahl der mehrmals besuchten Knoten im Eulerkreis: Sei $[v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}]$ mit $v_{n+1} = v_1$ ein Eulerkreis in G. Wähle das kleinste k so, dass es ein $j < k$ gibt mit $v_j = v_k$. Falls $j = 1$ und $k = n + 1$, so ist $[v_1, \ldots, v_{n+1}]$ ein echter Kreis. Ansonsten ist $K = [v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k]$ ein echter Kreis mit den Kanten $E' = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid j \leq i < k\}$. Der Graph $G' = (V, E \setminus E')$ enthält noch den Eulerkreis $[v_1, \ldots, v_j, v_{k+1}, \ldots, v_{n+1}]$. Nach Induktionsvoraussetzung kann G' in echte Kreise $\{K_1, \ldots, K_m\}$ zerlegt werden und G somit in $\{K_1, \ldots, K_m, K\}$.

Aufgabe 7 Sei G ein Graph mit n Knoten.

(a) Was ist die kleinste Anzahl an Kanten m, die man braucht, so dass G zusammenhängend ist?

(b) Wie viele Kanten muss G mindestens haben, so dass G in jedem Fall zusammenhängend ist?

Lösung

(a) P_n besitzt die kleinste Anzahl an Kanten: $n - 1$.

(b) K_{n-1} besitzt die größte Anzahl an Kanten für $n - 1$ Knoten. Erweitert man diesen um einen Knoten, so muss man noch eine Kante hinzufügen, damit der resultierende Graph zusammenhängend ist. Insgesamt benötigt man also mindestens $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ Kanten.