Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Diskrete Mathematik für Informatiker
WS 2015/2016

Übungsblatt 9

Aufgabe 1

- Beweisen Sie: K_n besitzt für $n \geq 3$ einen Hamiltonkreis.
- Sei G ein Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Wie viele Kanten muss G mindestens enthalten, damit G auf jeden Fall einen Hamiltonkreis besitzt?

Lösung

- $[1, \ldots, n]$ ist ein Hamiltonkreis für K_n.
- Idee: Betrachte K_{n-1} zusammen mit einem weiteren Knoten n. Führt man nur eine Kante ($\{i, n\}$ für $1 < i < n$) von K_{n-1} zu n, so gibt es keinen Hamiltonkreis. Führt man allerdings eine weitere Kante ein ($\{j, n\}$ für $1 < i \neq j < n$), so gibt es einen Hamiltonkreis. Die Behauptung ist also, dass es bei mindestens $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ Kanten einen Hamiltonkreis geben muss.

  Sei also $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n$, $|E| = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$, und sei $\{x, y\} \notin E$. Wenn wir zeigen können, dass $d_G(x) + d_G(y) \geq n$, so hat G nach dem Satz von Ore in jedem Fall einen Hamiltonkreis. Wir nehmen an, dass $d_G(x) + d_G(y) \leq n - 1$ und führen dies zum Widerspruch. Betrachte $(V', E') = G \setminus \{x, y\}$. Es gilt, dass $|V'| = n-2$ und

$$\begin{aligned} |E'| \geq |E| - (n-1) &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 - (n-1) \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{4 - 2(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2 + 4 - 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 - 5n + 8}{2} \end{aligned}$$

  K_{n-2} besitzt aber nur $\frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{n^2-5n+6}{2}$ Kanten, was ein Widerspruch ist.

Aufgabe 2 Das Komplement eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\{u, v\} \in \overline{E}$ genau dann, wenn $\{u, v\} \notin E$. Ein Graph G heißt selbstkomplementär, wenn G isomorph zu $\overline{G}$ ist. Beweisen Sie, dass in jedem selbstkomplementären Graphen mit n Knoten gilt: $n \equiv 0 \bmod 4$ oder $n \equiv 1 \bmod 4$.

Lösung
Damit G isomorph zu seinem Komplement ist, muss $|E| = |\overline{E}|$ gelten. Es gilt $K_n = (V, E \cup \overline{E})$. K_n besitzt $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten, also $2|E| = \frac{n(n-1)}{2}$, und damit $|E| = \frac{n(n-1)}{4}$. Es muss also entweder n oder $n-1$ durch 4 teilbar sein. Im Fall, dass $n-1$ durch 4 teilbar ist, bleibt beim Dividieren von n ein Rest von 1.

Aufgabe 3 Beweisen Sie: Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe und $a, b \in G$, so gibt es ein eindeutiges $c \in G$ mit $a \circ c = b$.

Lösung
Zum Beweis der Existenz wählt man $c = a^{-1} \circ b$, denn es gilt

$$a \circ (a^{-1} \circ b) = (a \circ a^{-1}) \circ b = e \circ b = b$$

Sei $c' \in G$ ein weiteres Element mit $a \circ c' = b$. Es muss also gelten, dass $a \circ c' = a \circ c$. Verknüpft man dies mit a^{-1}, so erhält man:

$$\begin{aligned} &a^{-1} \circ (a \circ c') = (a^{-1} \circ a) \circ c' = e \circ c' = c' \\ =&a^{-1} \circ (a \circ c) = (a^{-1} \circ a) \circ c = e \circ c = c \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: In jeder Gruppe $(G, \circ)$ mit neutralem Element e gilt für alle $a, b \in G$

- $a \circ a = a \circ b \Rightarrow a = b$
- $a \circ a = b \circ b \Rightarrow a = b$
- $a^5 = a \Rightarrow a^4 = a$
- $a^5 = e \wedge a^4 = e \Rightarrow a = e$

Lösung

- $a \circ a = a \circ b \Rightarrow a^{-1} \circ a \circ a = a^{-1} \circ a \circ b \Rightarrow a = b$
- Gilt nicht in $(\mathbb{Z}_2, +_2)$, da $0 +_2 0 = 1 +_2 1 = 0$.
- Gilt nicht in $(\mathbb{Z}_4, +_4)$, da $1^5 = 1$, aber $1^4 = 0$.
- $a^5 = e \wedge a^4 = e \Rightarrow a^5 = a^4 \Rightarrow (a^{-1})^4 a^5 = (a^{-1})^4 a^4 \Rightarrow a = e$

Aufgabe 5 Zeigen Sie, dass es eine Gruppe G und Elemente $a, b \in G$ gibt, so dass die Gleichung $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ nicht erfüllt ist.

Lösung
Diese Gleichheit kann nur in nicht kommutativen Gruppen verletzt sein. Die einfachste solche Gruppe ist S_3. Ihre Elemente sind Permutationen (Bijektionen) auf $\{1, 2, 3\}$, die wir in Zykelschreibweise angeben. Z.B. bedeutet $f = (1, 2, 3)$, dass $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ und $f(3) = 1$. Die Gruppenoperation ist die Funktionskomposition, das neutrale Element die Identität und die inversen Elemente die Umkehrfunktionen. Betrachte $f = (1, 2, 3)$ und $g = (2, 3)$. Wir erhalten $f \circ g = (1, 2)$ und $g \circ f = (1, 3)$ und somit

$$(f \circ g)^{-1} = (1, 2) \neq f^{-1} \circ g^{-1} = (1, 3, 2) \circ (2, 3) = (1, 3)$$