

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Gegeben sei die Struktur $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$, wobei $U_{\mathcal{A}}$ die Menge aller Menschen ist und $I_{\mathcal{A}}$ die folgende Interpretation ist:

- $W^{\mathcal{A}}(x) : x$ ist weiblich
- $K^{\mathcal{A}}(x, y) : x$ kennt y
- $v^{\mathcal{A}}(x) = y : y$ ist biologischer Vater von x
- $m^{\mathcal{A}}(x) = y : y$ ist biologischer Mutter von x
- $a^{\mathcal{A}}$ ist Adam, $e^{\mathcal{A}}$ ist Eva

Was bedeuten die folgenden prädikatenlogischen Formeln?

- a) $\forall x W(m(x))$
- b) $v(x) = a \wedge K(x, e)$
- c) $\exists x (W(x) \wedge K(a, x))$
- d) $\neg \exists x \forall y (W(y) \rightarrow K(x, y))$
- e) $\forall x \neg (\exists y (v(y) = x) \wedge \exists y (m(y) = x))$
- f) $\exists x \exists y (K(x, y) \wedge \neg K(y, x))$

Drücken Sie die folgenden Aussagen durch prädikatenlogische Formeln aus:

- a) Jeder kennt sich selbst.
- b) Es gibt eine weibliche Person, die Adam kennt.
- c) Jedes Elternpaar kennt sich.
- d) x und y sind Geschwister.
- e) x ist Großvater von y .
- f) Eva ist die Cousine von Adam.

Aufgabe 2. Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein zweistelliges Prädikatensymbol R . Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{C} = (\{0, 1, 2\}, I_{\mathcal{C}})$, wobei $f^{\mathcal{C}}(x, y) = x$, $R^{\mathcal{C}} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$, wobei $f^{\mathcal{N}}(x, y) = x \cdot y$, $R^{\mathcal{N}} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$
- $\mathcal{P} = (2^{\mathbb{N}}, I_{\mathcal{P}})$, wobei $f^{\mathcal{P}}(x, y) = x \cap y$, $R^{\mathcal{P}} = \{(x, y) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid x \subseteq y\}$

In welchen Strukturen gelten die folgenden Aussagen?

- a) $\exists x \forall y R(y, x)$
- b) $\forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$
- c) $\forall x \exists y \exists z (y \neq z \wedge f(y, z) = x)$
- d) $\forall x \forall y \forall z \forall w (R(x, y) \wedge R(z, w) \rightarrow R(f(x, z), f(y, w)))$

Aufgabe 3. Wir betrachten die Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$ über den natürlichen Zahlen (ohne 0) mit den Funktionssymbolen $+$ und \cdot (mit der üblichen Bedeutung). Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften durch prädikatenlogische Formeln.

- a) x ist ungerade.
- b) Es existiert ein multiplikativ neutrales Element.
- c) $x < y$.
- d) y ist Vielfaches von x .
- e) $x \bmod y = z$.