Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey



# Übungsblatt 9

**Aufgabe 1.** Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Es gilt $\forall x F \to \forall x G \equiv \forall x(F \to G)$.

(b) Jede prädikatenlogische Formel ohne $\neg$ ist erfüllbar.

(c) Jede Formel $F$ ist erfüllbarkeitsäquivalent zu $\exists x F$.

(d) Es gilt $\forall x F \equiv \exists x F$ genau dann, wenn $x$ nicht frei in $F$ vorkommt.

**Aufgabe 2.** Eine Formel $F$ *trennt* Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, falls $F$ in genau einer der beiden Strukturen erfüllt ist. Geben Sie für alle Paare $(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ mit $i \neq j$ jeweils eine trennende Formel an.

(a) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{A}_1})$, $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{Z}, I_{\mathcal{A}_2})$, $\mathcal{A}_3 = (\mathbb{Q}, I_{\mathcal{A}_3})$, wobei $R$ ein zweistelliges Relationssymbol ist und $R^{\mathcal{A}_i}$ die natürliche Ordnung auf $U_{\mathcal{A}_i}$ für alle $i \in \{1,2,3\}$ ist.

(b) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{A}_1})$, $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{Z}, I_{\mathcal{A}_2})$, $\mathcal{A}_3 = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{A}_3})$, wobei $f$ ein zweistelliges Funktionssymbol ist und $f^{\mathcal{A}_i}$ die natürliche Multiplikation auf $U_{\mathcal{A}_i}$ für alle $i \in \{1,2,3\}$ ist.

**Aufgabe 3.** Gegeben sei die Formel

$$\begin{aligned} F = {} & \forall x \forall y \forall z \big(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)\big) \\ & \wedge \forall x \neg R(x,x) \wedge \exists x \forall y (x \neq y \to R(y,x)) \wedge \forall x \exists y R(y,x) \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie eine Skolemform $F'$ von $F$.

(b) Geben Sie ein Modell $\mathcal{A}$ von $F$ an.

(c) Geben Sie ein Modell $\mathcal{A}'$ von $F'$, welches $\mathcal{A}$ erweitert.