Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Eine Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell besitzt.

(b) Jede Formel ist äquivalent zu ihrer Skolemform.

(c) Es gibt unendlich viele paarweise nicht äquivalente Formeln (über einer festen Menge von Prädikaten- und Funktionssymbolen).

Aufgabe 2. Betrachten Sie die folgende Aussage:

$$F = P(a) \wedge \forall x \Big(\neg P(x) \vee \big(\neg P(s(x)) \wedge P(s(s(x))) \big) \Big)$$

(a) Geben Sie das Herbrand-Universum $D(\mathcal{F})$ an, wobei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionssymbole in der Formel F ist.

(b) Geben Sie ein Herbrand-Modell $\mathcal{A}$ für F an. Beschreiben Sie $\mathcal{A}$ in einfachen Worten.

(c) Berechnen Sie die Herbrand-Expansion $E(G)$, wobei G die Skolemform von F ist.

(d) Geben Sie ein (aussagenlogisches) Modell von $E(G)$ an.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $\exists y \forall x (f(x) = g(x, y)) \wedge \exists x (f(x) \neq g(x, x))$

(b) $\forall x P(f(x, x)) \wedge \forall x \forall y ((x \neq y) \rightarrow \neg P(f(x, y)))$

(c) $\forall x (P(x) \vee Q(x, y)) \wedge \neg Q(y, y) \wedge \forall x ((x \neq y) \rightarrow \neg P(x))$

Aufgabe 4. Geben Sie prädikatenlogische Formeln an, die die folgenden Strukturen trennen (siehe Blatt 9, Aufgabe 2).

(a) $\mathcal{A}_1 = (\{0,1\}, I_{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{A}_2 = (\{0,1\}, I_{\mathcal{A}_2})$
mit $f^{\mathcal{A}_1}(x,y) = x \wedge y$, $f^{\mathcal{A}_2}(x,y) = x \vee y$ und $P^{\mathcal{A}_1} = P^{\mathcal{A}_2} = \{0\}$

(b) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, I_{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{A}_2})$
mit $f^{\mathcal{A}_1}(x,y) = x \cdot y$, $f^{\mathcal{A}_2}(x,y) = x + y$ und $P^{\mathcal{A}_1} = P^{\mathcal{A}_2} = \{x \mid x \text{ gerade}\}$

(c) $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{A}_1})$ und $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{R}, I_{\mathcal{A}_2})$
mit $f^{\mathcal{A}_1}(x) = x^2$, $f^{\mathcal{A}_2}(x) = 2 \cdot x$ und $P^{\mathcal{A}_1} = P^{\mathcal{A}_2} = \{x \mid x \geq 0\}$

Zusatz: Lösen Sie (b) und (c) ohne die Relation P.