Universität Siegen | Carl Philipp Reh
Lehrstuhl Theoretische Informatik | Daniel König

Diskrete Mathematik für Informatiker

WS 2016/2017

Übung 1

1. Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

   a) $(\{1,2\} \times \{3,4\}) \cup \{1,2,3\}$

   b) $2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}}$

   c) $\bigcap_{i \in \{2,6\}} \{\frac{i}{2}, i+1\}$

   d) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, n+1, 2n\}$

2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   a) $A \subseteq B \cap C \leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \subseteq C$

   b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

   c) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\} = \emptyset$

   d) $(\bigcup_{i \in I} D_i) \cap B = \bigcup_{i \in I} (D_i \cap B)$

   e) $\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \pi| \leq |\varepsilon|\} = \{\pi\}$

3. Beweisen oder widerlegen Sie:
   Aus $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ und $A_1 \cap A_3 \neq \emptyset$ folgt $\bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i \neq \emptyset$.

Lösung zu Übung 1

1. a) $(\{1,2\} \times \{3,4\}) \cup \{1,2,3\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),1,2,3\}$

b)

$$\begin{aligned} 2^{\{1,2,3\}} \setminus 2^{\{1,2\}} =& \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \\ & \setminus \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \\ =& \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \end{aligned}$$

c) $\bigcap_{i \in \{2,6\}} \{\frac{i}{2}, i+1\} = \{\frac{2}{2}, 3\} \cap \{\frac{6}{2}, 7\} = \{1,3\} \cap \{3,7\} = \{3\}$

d) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, n+1, 2n\} = \mathbb{N}$

2. a)

$$\begin{aligned} A \subseteq B \cap C &\leftrightarrow \forall x. x \in A \rightarrow x \in B \cap C \\ &\leftrightarrow \forall x. x \in A \rightarrow x \in B \wedge x \in C \\ &\leftrightarrow \forall x. x \in A \rightarrow x \in B \wedge x \in A \rightarrow x \in C \\ &\leftrightarrow (\forall x. x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x. x \in A \rightarrow x \in C) \\ &\leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \subseteq C \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \leftrightarrow \\ (\forall x. x \in A \setminus (B \cup C) &\leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cup C \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C) \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C \\ &\leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)) \end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{m\in\mathbb{N}\mid m\geq n\}=\emptyset\\
\leftrightarrow&\forall x.\neg(x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{m\in\mathbb{N}\mid m\geq n\})\\
\leftrightarrow&\forall x.\neg(\forall n\in\mathbb{N}.x\in\mathbb{N}\land x\geq n)\\
\leftrightarrow&\forall x.\exists n\in\mathbb{N}.\neg(x\in\mathbb{N}\land x\geq n)\\
\leftrightarrow&\forall x.\exists n\in\mathbb{N}.x\notin\mathbb{N}\lor x<n\\
\leftarrow&\forall x.x\notin\mathbb{N}\lor x<x+1
\end{aligned}
$$

d) Zwei Richtungen:

$\subseteq$:

$$
\begin{aligned}
&\{\pi\}\subseteq\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\{x\in\mathbb{R}\mid |x-\pi|\leq|\varepsilon|\})\\
\leftrightarrow&\pi\in\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\{x\in\mathbb{R}\mid |x-\pi|\leq|\varepsilon|\}\\
\leftrightarrow&\forall\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.\pi\in\mathbb{R}\land|\pi-\pi|\leq|\varepsilon|\\
\leftrightarrow&\forall\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.0\leq|\varepsilon|
\end{aligned}
$$

$\supseteq$:

$$
\begin{aligned}
&\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\{x\in\mathbb{R}\mid |x-\pi|\leq|\varepsilon|\}\subseteq\{\pi\}\\
\leftrightarrow&\forall x.x\neq\pi\rightarrow\neg(x\in\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\{x\in\mathbb{R}\mid |x-\pi|\leq|\varepsilon|\})\\
\leftrightarrow&\forall x.x\neq\pi\rightarrow\neg(x\in\mathbb{R}\land\forall\epsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.|x-\pi|\leq|\varepsilon|)\\
\leftrightarrow&\forall x.x\neq\pi\rightarrow x\notin\mathbb{R}\lor\neg(\forall\epsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.|x-\pi|\leq|\varepsilon|)\\
\leftrightarrow&\forall x.x\neq\pi\rightarrow x\notin\mathbb{R}\lor\exists\epsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.|x-\pi|>|\varepsilon|\\
\leftarrow&\forall x.x\neq\pi\rightarrow x\notin\mathbb{R}\lor|x-\pi|>|(x-\pi)|/2
\end{aligned}
$$

3. Sei $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{2,3\}$ und $A_3=\{1,3\}$. Dann gilt $A_1\cap A_2=\{2\}$, $A_1\cap A_3=\{1\}$ und $A_2\cap A_3=\{3\}$, aber $A_1\cap A_2\cap A_3=\emptyset$. Die Behauptung ist also falsch.