Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik

Carl Philipp Reh
Daniel König

# Diskrete Mathematik für Informatiker

WS 2016/2017

## Übung 2

1. Bestimmen Sie, ob folgende Funktionen injektiv bzw. surjektiv sind:

   a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
   $f_1(x) = x \cdot x$

   b) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
   $f_2(x) = |x|$

   c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $f_3 = \sin$

   d) $f_4 : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
   $f_4 = \sin$

   e) $f_5 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
   $$f_5(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{falls } x < 0 \\ 2x & \text{sonst} \end{cases}$$

   f) $f_6 : \emptyset \to \mathbb{N}$

2. Zeigen Sie folgende Aussagen (zur Erinnerung: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$):

   a) Wenn $g : B \to C$ und $f : A \to B$ injektiv sind, so ist auch $g \circ f : A \to C$ injektiv.

   b) Sei $f : A \to B$ surjektiv, dann gilt für alle $g_1, g_2 : B \to C$: Wenn $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, dann $g_1 = g_2$.

   c) Wenn $f : A \to B$ bijektiv ist, dann gibt es eine Funktion $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$. (Zu einer Menge $M$ ist $\mathrm{id}_M : M \to M$ die Identitätsfunktion auf $M$, also $\mathrm{id}_M(x) = x$.)

3. Bestimmen Sie, ob folgende Relationen reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch bzw. transitiv sind:

   a) $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a|b\}$

   b) $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ ist Quadratzahl}\}$

   c) $R_3 = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid a < c \vee (a = c \wedge b < d)\}$

   d) $R_4 = \emptyset \subseteq A \times A$ für eine Menge $A$

4. Zeigen Sie folgende Aussagen:

   a) Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf $A$. $R$ ist genau dann transitiv, wenn $R \circ R \subseteq R$.

   b) Sei $\{A_i \mid i \in I\}$ eine Partition von $A$ und sei

   $$R = \{(a, b) \in A \times A \mid \exists i \in I. a \in A_i \wedge b \in A_i\}.$$

   Zeigen Sie, dass $R$ eine Äquivalenzrelation ist.