Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik

Carl Philipp Reh
Daniel König

Diskrete Mathematik für Informatiker

WS 2016/2017

Übung 2

1. Bestimmen Sie, ob folgende Funktionen injektiv bzw. surjektiv sind:

   a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
   $f_1(x) = x \cdot x$

   b) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
   $f_2(x) = |x|$

   c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $f_3 = \sin$

   d) $f_4 : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
   $f_4 = \sin$

   e) $f_5 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
   $$f_5(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{falls } x < 0 \\ 2x & \text{sonst} \end{cases}$$

   f) $f_6 : \emptyset \to \mathbb{N}$

2. Zeigen Sie folgende Aussagen (zur Erinnerung: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$):

   a) Wenn $g : B \to C$ und $f : A \to B$ injektiv sind, so ist auch $g \circ f : A \to C$ injektiv.

   b) Sei $f : A \to B$ surjektiv, dann gilt für alle $g_1, g_2 : B \to C$: Wenn $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, dann $g_1 = g_2$.

   c) Wenn $f : A \to B$ bijektiv ist, dann gibt es eine Funktion $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$. (Zu einer Menge M ist $\mathrm{id}_M : M \to M$ die Identitätsfunktion auf M, also $\mathrm{id}_M(x) = x$.)

3. Bestimmen Sie, ob folgende Relationen reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch bzw. transitiv sind:

   a) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a|b\}$

   b) $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ ist Quadratzahl}\}$

   c) $R_3 = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid a < c \vee (a = c \wedge b < d)\}$

   d) $R_4 = \emptyset \subseteq A \times A$ für eine Menge A

4. Zeigen Sie folgende Aussagen:

   a) Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. R ist genau dann transitiv, wenn $R \circ R \subseteq R$.

   b) Sei $\{A_i \mid i \in I\}$ eine Partition von A und sei

   $$R = \{(a,b) \in A \times A \mid \exists i \in I. a \in A_i \wedge b \in A_i\}.$$

   Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung zu Übung 2

1. a) f_1 ist injektiv, denn für alle $x, y \in \mathbb{N}$ mit $f_1(x) = f_1(y)$ gilt $x \cdot x = y \cdot y$, und somit $x = y$. f_1 ist nicht surjektiv, denn es gibt z.B. kein $x \in \mathbb{N}$ mit $3 = f_1(x) = x \cdot x$.

   b) f_2 ist nicht injektiv, denn $f_2(-1) = f_2(1) = 1$. f_2 ist surjektiv, denn für jedes $x \in \mathbb{N}$ gilt $x \in \mathbb{Z}$ und $f_2(x) = |x| = x$.

   c) f_3 ist nicht injektiv, denn $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$. f_3 ist nicht surjektiv, da z.B. kein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $\sin(x) = 2$.

   d) f_4 ist aus demselben Grund wie f_3 nicht injektiv. f_4 ist surjektiv, da $f(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

   e) f_5 ist injektiv: Sei $x, y \in \mathbb{N}$ mit $f_5(x) = f_5(y)$. Es gibt nun insgesamt vier Fälle:

   $x < 0$ **und** $y < 0$**:** $-2x + 1 = -2y + 1$, also $x = y$.

   $x \geq 0$ **und** $y < 0$**:** $2x = -2y+1$, also $2(x+y) = 1$, also $x+y = \frac{1}{2}$, was ein Widerspruch dazu ist, dass $x, y \in \mathbb{Z}$.

$x < 0$ und $y \geq 0$: Analog zum vorherigen Fall.

$x \geq 0$ und $y \geq 0$: $2x = 2y$, also $x = y$.

f_5 ist surjektiv, denn: Sei $y \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden, ob y gerade oder ungerade ist:

y gerade: Also gibt es ein $z \in \mathbb{N}$ mit $y = 2z$, bzw. $z \in \mathbb{Z}$ und $z \geq 0$. Damit gilt $f(z) = 2z = y$.

y ungerade: Also gibt es ein $x \in \mathbb{N}$ mit $y = 2x + 1$. Setze $z = -x - 1 \in \mathbb{Z}$ (somit $z < 0$). Damit erhalten wir $f(z) = -2z - 1 = -2(-x - 1) - 1 = 2x + 1 = y$.

f) f_6 ist injektiv, denn aus $x, y \in \emptyset \wedge f_6(x) = f_6(y)$ folgt auch $x = y$. f_6 ist nicht surjektiv, da z.B. kein $x \in \emptyset$ existiert mit $f_6(x) = 0$.

2. a) Seien $g : B \to C$ und $f : A \to B$ injektiv, $x, y \in A$ und $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Nach Definition von $\circ$ gilt also $g(f(x)) = g(f(y))$. Wegen Injektivität von g folgt $f(x) = f(y)$ und wegen Injektivität von f folgt $x = y$, also ist auch $g \circ f$ injektiv.

   b) Sei $f : A \to B$ surjektiv, $g_1, g_2 : B \to C$ und gelte $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Zu zeigen ist, dass $g_1(x) = g_2(x)$ für alle $x \in B$. Da f surjektiv ist, gibt es für x ein $y \in A$ mit $f(y) = x$. Damit ist zu zeigen, dass $g_1(f(y)) = g_2(f(y))$, was bereits nach Voraussetzung gilt.

   c) Sei $f : A \to B$ bijektiv. Wähle $g = f^{-1} : B \to A$. Sei $f(x) = y$. Nach Definition von f^{-1} gilt dies genau dann, wenn $f^{-1}(y) = x$. Somit erhalten wir $f^{-1}(f(x)) = x$, also $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$. Ebenso gilt $f(f^{-1}(y)) = y$, also $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$.

3. a) **Reflexiv:** Ja, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n | n \leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}. q \cdot n = n \leftarrow 1 \cdot n = n$.

   Irreflexiv: Nein, da $R_1 \neq \emptyset$ und R_1 reflexiv.

   Symmetrisch: Nein, denn z.B. $2|4$, aber nicht $4|2$.

   Antisymmetrisch: Ja, denn gelte $n|m$ und $m|n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, also $\exists p, q \in \mathbb{N}$ mit $p \cdot n = m$ und $q \cdot m = n$, also $q \cdot p \cdot n = n$. Erster Fall: $n = 0$, dann ist $p \cdot 0 = m = 0$. Zweiter Fall: $n \neq 0$, dann muss $q = p = 1$ gelten. In beiden Fällen gilt $m = n$.

   Transitiv: Ja, denn gelte $a|b$ und $b|c$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}$, also $\exists p. p \cdot a = b$ und $\exists q. q \cdot b = c$. Durch Einsetzen erhalten wir $q \cdot (p \cdot a) = c$, bzw. $(q \cdot p) \cdot a = c$ und somit $a|c$.

b) $n \in \mathbb{N}$ ist eine Quadratzahl genau dann, wenn es ein $a \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = a^2$.

Reflexiv: Ja, denn nach Definition ist $a \cdot a$ für $a \in \mathbb{N}$ eine Quadratzahl.

Irreflexiv: Nein, da $R_2 \neq \emptyset$ und R_2 reflexiv ist.

Symmetrisch: Ja, denn falls $a \cdot b$ Quadratzahl ist, so ist auch $b \cdot a$ Quadratzahl.

Antisymmetrisch: Nein, denn z.B. $(2, 8) \in R_2$ und $(8, 2) \in R_2$, aber $2 \neq 8$.

Transitiv: Nein, denn z.B. $2 \cdot 0 = 0^2$ und $0 \cdot 3 = 0^2$, aber $2 \cdot 3 = 6$ und 6 ist keine Quadratzahl. (Würde man die 0 als Quadratzahl ausschließen, so wäre R_2 transitiv, denn seien $a \cdot b$ und $b \cdot c$ Quadratzahlen, d.h. es gibt $p, q \in \mathbb{N}$ mit $a \cdot b = p^2$ und $b \cdot c = q^2$. Da $p \neq 0$, gilt auch $b \neq 0$, somit $a = \frac{p^2}{b}$ und $c = \frac{q^2}{b}$, also

$$a \cdot c = \frac{p^2 \cdot q^2}{b^2} = \left(\frac{p \cdot q}{b}\right)^2.$$

Wir wissen also, dass $a \cdot c \in \mathbb{N}$ und es ein $z = \frac{p \cdot q}{b}$ gibt mit $a \cdot c = z^2 \in \mathbb{N}$. Zu zeigen bleibt noch, dass auch $z \in \mathbb{N}$. Sei $z^2 \in \mathbb{N}$, aber $z \notin \mathbb{N}$, d.h. es gibt $x, y \in \mathbb{N}$ mit $\frac{x}{y} = z$, wobei x und y keine gemeinsamen Primfaktoren haben. Durch Quadrieren werden alle Primfaaktoren verdoppelt, d.h. x^2 und y^2 haben auch keine gemeinsamen Primfaktoren. Damit ist $z^2 = \frac{x^2}{y^2} \notin \mathbb{N}$, was ein Widerspruch ist.)

c) **Reflexiv:** Nein, denn z.B. $((0, 0), (0, 0)) \notin R_3$, da $\neg 0 < 0$.

Irreflexiv: Ja, denn für $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ gilt $((a, b), (a, b)) \notin R_3$ gdw. $\neg(a < a \vee (a = a \wedge b < b)$ gdw. $(a \geq a \wedge (a \neq a \vee b \geq b)$.

Symmetrisch: Nein, denn z.B. $((1, 5), (2, 5)) \in R_3$, aber $((2, 5), (1, 5)) \notin R_3$.

Antisymmetrisch: Ja, denn sei $((a, b), (c, d)) \in R_3$ und $((c, d), (a, b)) \in R_3$. Dies gilt genau dann, wenn $a < c \vee (a = c \wedge b < d)$ und $c < a \vee (c = a \wedge d < b)$. Es kann nicht $a < c$ und $c < a$ gelten, also muss jeweils der zweite Teil von $\vee$ wahr sein. Dafür müsste aber sowohl $b < d$ als auch $d < b$ gelten, was auch nicht möglich ist. Somit ist Antisymmetrie erfüllt, da die Voraussetzung der Bedingung nie wahr sein kann.

Transitiv: Ja, denn seien $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in R_3$ und $((b_1, b_2), (c_1, c_2)) \in R_3$, was genau dann gilt, wenn $a_1 < b_1 \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 < b_2)$

und $b_1 < c_1 \vee (b_1 = c_1 \wedge b_2 < c_2)$. Wir haben nun zu zeigen, dass auch $a_1 < c_1 \vee (a_1 = c_1 \wedge a_2 < c_2)$ gilt. Dazu unterscheiden wir alle vier Fälle:

$a_1 < b_1$ und $b_1 < c_1$: Dann gilt $a_1 < c_1$.

$a_1 < b_1$, $b_1 = c_1$ und $b_2 < c_2$: Dann gilt $a_1 < b_1 = c_1$, also $a_1 < c_1$.

$a_1 = b_1$, $a_2 < b_2$ und $b_1 < c_1$: Dann gilt $a_1 = b_1 < c_1$, also $a_1 < c_1$.

$a_1 = b_1$, $a_2 < b_2$, $b_1 = c_1$ und $b_2 < c_2$: Dann gilt $a_1 = b_1 = c_1$, also $a_1 = c_1$. Ebenso gilt $a_2 < b_2 < c_2$, also $a_2 < c_2$.

d) **Reflexiv:** R_4 ist genau dann reflexiv, wenn für alle $x \in A$ gilt, dass $(x, x) \in \emptyset$. Dies gilt genau dann, wenn $A = \emptyset$.

Irreflexiv: R_4 ist genau dann irreflexiv, wenn für alle $x \in A$ gilt, dass $(x, x) \notin \emptyset$, was immer wahr ist.

Symmetrisch: R_4 ist genau dann symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ mit $(a, b) \in \emptyset$ gilt, dass auch $(b, a) \in \emptyset$. Dies gilt, da die Voraussetzung $(a, b) \in \emptyset$ nie wahr sein kann.

Antisymmetrisch: Analog zur Symmetrie.

Transitiv: Analog zur Symmetrie.

4. a) Wir zeigen beide Richtungen separat:

$\Rightarrow$: Sei $R \subseteq A \times A$ transitiv und sei $(a, c) \in R \circ R$. Nach Definition von $R \circ R$ gilt, dass es ein $b \in R$ gibt mit $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$. Wegen Transitivität von R gilt also auch $(a, c) \in R$.

$\Leftarrow$: Gelte $R \circ R \subseteq R$, und seien $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$. Nach Definition gilt $(a, c) \in R \circ R$ und somit auch $(a, c) \in R$.

b) **Reflexiv:** Sei $a \in A$. $(a, a) \in R$ gilt genau dann, wenn es ein $i \in I$ gibt mit $a \in A_i$ und $a \in A_i$, also $a \in A_i$. Dieses i existiert, da $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

Symmetrisch: Seien $a, b \in A$ und $(a, b) \in R$, also gibt es ein $i \in I$ mit $a \in A_i$ und $b \in A_i$. Damit gilt auch $b \in A_i$ und $a \in A_i$, also $(b, a) \in R$.

Transitiv: Seien $a, b, c \in A$, $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, also gibt es $i, j \in I$ mit $a \in A_i$, $b \in A_i$, $b \in A_j$ und $c \in A_j$. Da für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$, muss $i = j$ sein. Somit gilt auch $c \in A_i$ und $(a, c) \in R$.