Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik

Carl Philipp Reh
Daniel König

Diskrete Mathematik für Informatiker

WS 2016/2017

Übung 4

1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion über n:

   a) Sei A eine Menge mit $|A| = n$. Dann gilt $|2^A| = 2^n$.

   b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{3}$

   c) $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$

   d) $3 | (n^3 - n)$

2. a) Bestimmen Sie die Menge aller möglichen Wörter der Länge n über einem Alphabet mit k Buchstaben.

   b) An einem Marathon nehmen 20 Läufer teil. In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen können die Läufer das Ziel erreichen?

   c) Wie viele verschiedene mögliche Zahlenkombinationen können bei einer Lottoziehung (6 aus 49) gezogen werden?

   d) Wie viele verschiedene Notenverteilungen können entstehen, wenn bei einer Klausur 20 Studenten mitschreiben?

   e) Aus einer Schulklasse von 23 Schülern soll eine Gruppe von 5 Schülern zum Direktor geschickt werden. Auf wie viele Arten kann diese Abordnung gebildet werden?

   f) In einem Zimmer gibt es 5 Lampen, die unabhängig voneinander aus- und eingeschaltet werden können. Wie viele Arten der Beleuchtung gibt es insgesamt?

   g) In einer Liga spielen 7 Mannschaften. Wie viele mögliche Tabellenkonstellationen gibt es?

   h) Wie viele natürliche Zahlen können als Produkt von 10 Faktoren aus den Zahlen 1,2,3 und 4 dargestellt werden?

3. a) Bestimmen Sie $\binom{6}{2}$.

   b) Bestimmen Sie $\binom{n}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

   c) Zeigen Sie, dass für $n, k \in \mathbb{N}$ die Gleichung $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ gilt.

4. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} = 2^{n+1} - 1$$

Lösung zu Übung 4

1. a) **$n = 0$:** $|2^{\emptyset}| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$

   $n \to n+1$: Sei $|A| = n+1$, also $A = A' \uplus \{x\}$ mit $|A'| = n$. Wir können $2^{A' \uplus \{x\}}$ schreiben als $2^{A'} \uplus \{M \cup \{x\} \mid M \in 2^{A'}\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt, dass $|2^{A'}| = 2^n$. Insgesamt folgt, dass $|2^A| = 2^{n+1}$.

   b) **$n = 0$:** $\sum_{k=1}^{0}(2k-1)^2 = 0 = \frac{0\cdot(2\cdot 0-1)\cdot(2\cdot 0+1)}{3}$

$n \to n+1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2\right) + (2(n+1)-1)^2 \\
&= \frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \\
&= \frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1) + 3\cdot(2n+1)^2}{3} \\
&= \frac{n\cdot(4n^2-1) + 3\cdot(2n+1)^2}{3} \\
&= \frac{4n^3 - n + 12n^2 + 12n + 3}{3} \\
&= \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n + 6n^2 + 9n + 3}{3} \\
&= \frac{(2n^2+3n+1)(2n+3)}{3} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)}{3} \\
&= \frac{(n+1)\cdot(2(n+1)-1)\cdot(2(n+1)+1)}{3}
\end{aligned}
$$

c) $n = 0$: $\sum_{k=1}^{2^0-1}\frac{1}{k} = 0 \geq 0 = \frac{0}{2}$

$n \to n+1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k} &= \left(\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k}\right) + \left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k}\right) \\
&\geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k} \\
&\geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{n}{2} + \frac{2^n}{2^{n+1}} \\
&= \frac{n+1}{2}
\end{aligned}
$$

d) $n = 0$: $3|0$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} 3|((n+1)^3 - (n+1)) &\Leftrightarrow 3|(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1) \\ &\Leftrightarrow 3|(n^3 - n + 3(n^2 + n)) \\ &\Leftarrow 3|(n^3 - n) \wedge 3|(3(n^2 + n)) \end{aligned}$$

2.
a) Mit Zurücklegen und Berücksichtigung der Reihenfolge: k^n

b) Ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge: 20!

c) Ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: $\binom{49}{6}$

d) Mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: Eine Notenverteilung gibt an, wie oft eine bestimmte Note erreicht wurde. Wir nehmen an, es gibt die Noten $1, 2, 3, 4, 5$. Dann gibt es $\binom{5+20-1}{20}$ Notenverteilungen.

e) Ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: $\binom{23}{5}$

f) Mit Zurücklegen und Berücksichtigung der Reihenfolge. Es gibt zwei Zustände für jede Lampe: 2^5

g) Ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge: 7!

h) Mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Wir können jedoch nicht die Multimengen von $\{1, 2, 3, 4\}$ mit 10 Elementen betrachten, weil $4 \cdot 1 = 2 \cdot 2$. Jede Zahl $x = 2^n \cdot y$ mit $n \in \mathbb{N}$ kann folgendermaßen ersetzt werden: Falls n gerade ist, so gilt $x = 4^{n/2} \cdot y$, und falls n ungerade ist, so gilt $x = 4^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot 2 \cdot y$. Insgesamt genügt es also, folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

- Es gibt keinen Faktor 2, also wählen wir 10 Zahlen aus $\{1, 3, 4\}$, wofür es $\binom{3+10-1}{10} = 66$ Möglichkeiten gibt.
- Es gibt genau einen Faktor 2, also wählen wir 9 Zahlen aus $\{1, 3, 4\}$, wofür es $\binom{3+9-1}{9} = 55$ Möglichkeiten gibt.

Insgesamt gibt es also $66 + 55 = 121$ Möglichkeiten.

3.
a) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

b) $\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$

c)

$$\begin{aligned}
k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(k-1)!} \\
&= n\frac{(n-1)!}{(n-k)!\cdot(k-1)!} = n\frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!\cdot(k-1)!} \\
&= n\binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}$$

4. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$. Wir erhalten also:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} 2^i$$

Wir zeigen nun per Induktion, dass die gewünschte Gleichung gilt:

$n = 0$**:** $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 = 2 - 1 = 2^{0+1} - 1$

$n \to n+1$**:** $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = (\sum_{i=0}^{n} 2^i) + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$