Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik

Carl Philipp Reh
Daniel König

# Diskrete Mathematik für Informatiker

WS 2016/2017

## Übung 5

1. a) Lösen Sie die folgende Gleichung mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 8$.

   b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

2. Zeichnen Sie die folgenden Graphen planar:

   a) $K_4$

   b) $K_{2,4}$

   c) $C_5$

   d) $P_5$

3. Gegeben ein ungerichteter Graph
   $G = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\})$.

   a) Zeichnen Sie $G$.

   b) Bestimmen Sie $G \setminus 3$

   c) Bestimmen Sie $G \setminus \{1, 2\}$

   d) Bestimmen Sie $G[1, 2, 5]$

   e) Geben Sie die Nachbarschaft der Knoten 2 und 4 an!

   f) Geben Sie den Grad aller Knoten an!

   g) Bestimmen Sie einen Weg der Länge 3 vom Knoten 1 zum Knoten 3.

h) Ist $G$ zusammenhängend?

i) Ist $G$ bipartit?

j) Ist $G$ planar? (Geben sie ggf. eine planare Zeichnung an!)

4. Beweisen Sie, dass jeder ungerichtete Graph $G = (V, E)$ ($|V| \geq 2$) mindestens 2 Knoten mit gleichem Grad hat!

5. Wie viele Graphen mit $n$ Knoten gibt es?

6. Beweisen Sie: $C_n$ ist bipartit genau dann, wenn $n$ gerade ist.

**Lösung zu Übung 5**

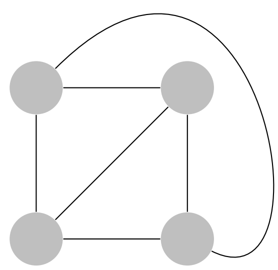
1. a)

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 &= 1x^0 + 3x^1 + 3x^2 + 1x^3 \\ &= \binom{3}{0} x^0 1^3 + \binom{3}{1} x^1 1^2 + \binom{3}{2} x^2 1^1 + \binom{3}{3} x^3 1^0 \\ &= (x+1)^3 \end{aligned}$$

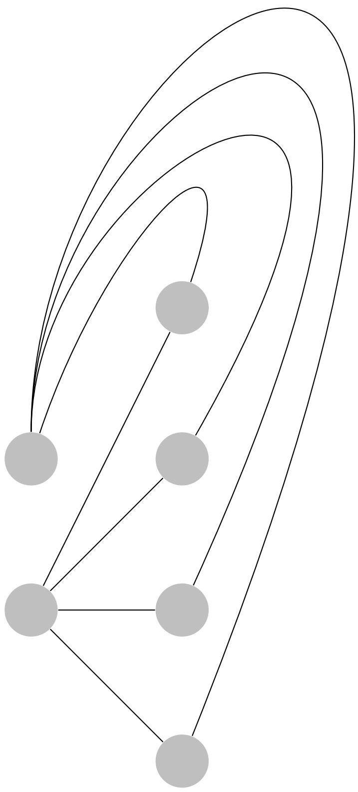
Mit $x = 1$ ergibt sich $(1+1)^3 = 2^3 = 8$.

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0$

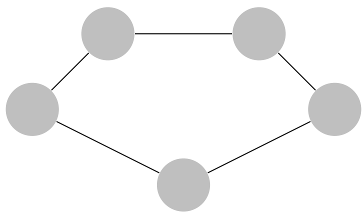
2. a)



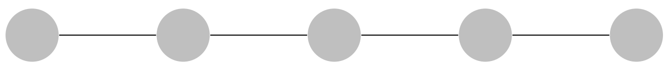
b)



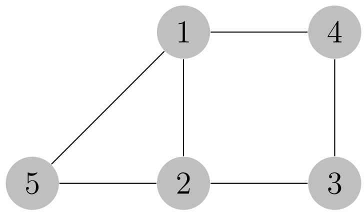
c)



d)



3. a)




b) $G \setminus 3 = (\{1,2,4,5\}, \{\{1,2\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,5\}\})$

c) $G \setminus \{1,2\} = (\{1,2,3,4,5\}, \{\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,4\}\})$

d) $G[1,2,5] = (\{1,2,5\}, \{\{1,2\},\{1,5\},\{2,5\}\})$

e) $N_G(2) = \{1,3,5\}$, $N_G(4) = \{1,3\}$, $N_G(2) \cup N_G(4) = \{1,3,5\}$

f) $d_G(1) = 3$, $d_G(2) = 3$, $d_G(3) = 2$, $d_G(4) = 2$, $d_G(5) = 2$

g) $[1,2,3]$

h) Ja.

i) Nein, da ein Dreieck schon nicht bipartit ist.

j) Ja.

4. Jeder Knoten $v \in V$ hat einen Grad $0 \leq d_G(v) \leq |V| - 1$. Damit alle Knoten unterschiedlichen Grad haben, muss also insbesondere ein Knoten $v_1$ mit $d_G(v_1) = 0$ und ein Knoten $v_2$ mit $d_G(v_2) = |V| - 1$ existieren. Wegen $d_G(v_2) = |V| - 1$ muss $\{v_1, v_2\} \in E$ gelten, aber wegen $d_G(v_1) = 0$ muss $\{v_1, v_2\} \notin E$ gelten, was ein Widerspruch ist.

5. Ein (einfacher, ungerichteter) Graph mit $n$ Knoten kann höchstens $e_n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Kanten besitzen. Wir erhalten also insgesamt $2^{e_n}$ Graphen mit $n$ Knoten.

6. Wir schreiben $C_n$ als Pfad $[v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}]$, wobei $v_1 = v_{n+1}$. Damit $C_n$ bipartit ist, muss es eine Partition $V = A \uplus B$ so geben, dass für alle $1 \leq i \leq n$ gilt: $v_i \in A \Leftrightarrow v_{i+1} \in B$.

$n$ **gerade:** Dann ist $V_g = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n, i \text{ gerade}\}$ und $V_u = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n, i \text{ ungerade}\}$ eine Partition mit der gewünschten Eigenschaft. Insbesondere ist $v_n \in V_g$ und $v_1 \in V_u$.

$n$ **ungerade:** Sei $A \uplus B$ eine Partition mit der gewünschten Eigenschaft. Sei $v_1 \in A$ ($v_1 \in B$ verläuft analog). Dann muss $v_2 \in B$ sein, $v_3 \in A$, usw. Wir erhalten also, dass $v_n \in A$, was ein Widerspruch ist.