

## Diskrete Mathematik für Informatiker

WS 2016/2017

### Übung 6

1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

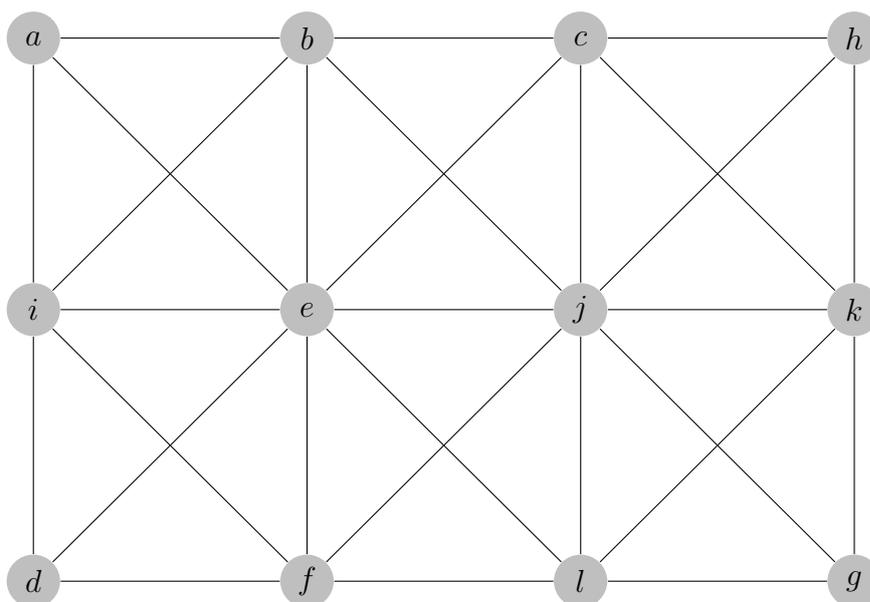
a)  $\chi(K_n) = n$

b)  $\chi(K_{m,n}) = 2$

c)  $\chi(P_n) = 2$

d) Falls  $n$  gerade:  $\chi(C_n) = 2$ , falls  $n$  ungerade:  $\chi(C_n) = 3$

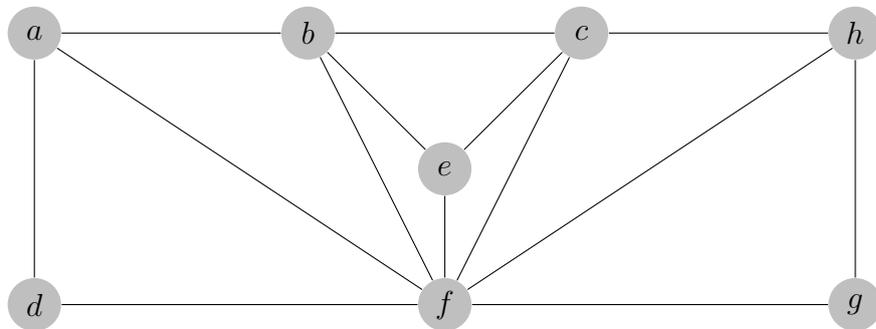
2. Sei  $G_{n,m}$  der Graph bestehend aus  $n \cdot m$  Quadraten, wobei jeweils  $n$  Quadrate untereinander und  $m$  Quadrate nebeneinander liegen. Zusätzlich sind die beiden diagonal gegenüber liegenden Punkte in einem Quadrat miteinander verbunden. Z.B. ist  $G_{3,2} =$



Bestimmen Sie, welche der  $G_{n,m}$  planar sind. Tipp: Untersuchen Sie zunächst  $G_{1,n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , anschließend  $G_{2,2}$  und schließlich alle anderen  $G_{n,m}$ .

3. Sei  $G$  ein Baum mit 6 Knoten. Wie viele Blätter kann  $G$  enthalten?

4. Gegeben sei folgender Graph  $G$ :



Bestimmen Sie  $\chi(G)$  und geben Sie eine 4-Färbung an.

5. Beweisen Sie: Für einen Graphen mit  $m$  Kanten gilt

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

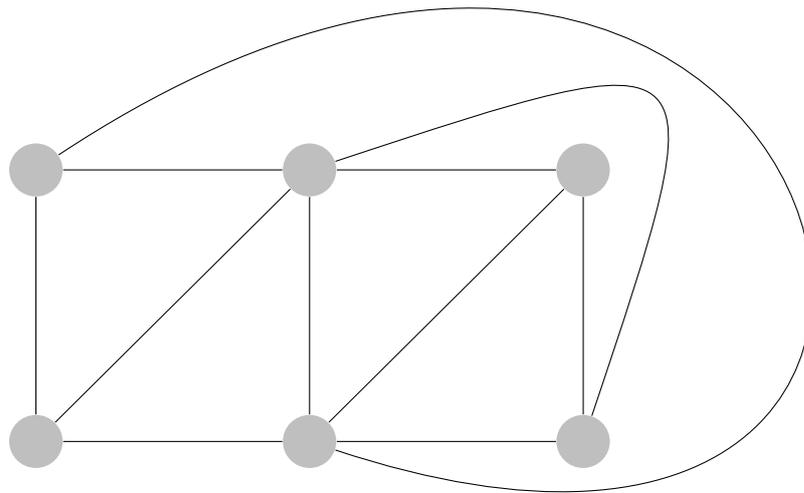
Hinweis: Nehmen Sie an, ihr Graph hat  $\chi(G)$  Farbklassen. Was können Sie dann für die Anzahl der Kanten zwischen den Farbklassen folgern?

6. Wie viele Kreise der Länge  $r$  enthält der vollständige Graph  $K_n$ ?

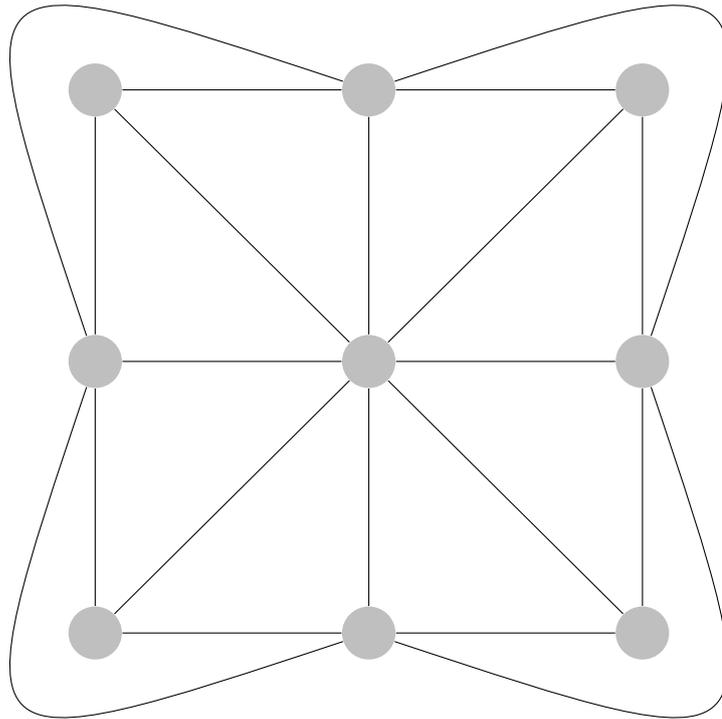
7. Beweisen Sie: Ist  $G = (V, E)$  ein Baum mit  $|V| \geq 2$ , so hat jeder Knoten  $v$  den Grad  $d_G(v) \geq 1$  und für die Summe aller Knotengrade gilt  $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2(|V| - 1)$ . Gilt auch die Rückrichtung dieser Aussage?

## Lösung zu Übung 6

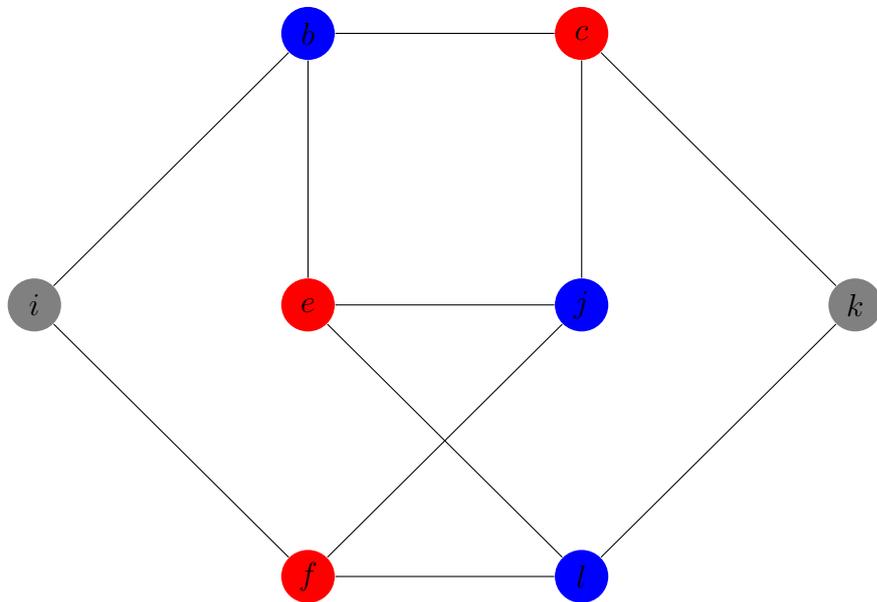
1.
  - a) Es gilt  $\Delta(K_n) = n - 1$ , woraus  $\chi(K_n) \leq n$  folgt. Wenn wir annehmen, dass  $\chi(K_n) < n$  ist, dann müssen zwei Knoten dieselbe Farbe haben. Dies ist aber nicht zulässig, da alle Knoten miteinander verbunden sind.
  - b) Für alle Graphen  $G = (V, E)$  mit  $E \neq \emptyset$  gilt  $\chi(G) \geq 2$ , also auch  $\chi(K_{m,n}) \geq 2$ .  $K_{m,n}$  lässt sich färben, indem jede der zwei Partitionen eine Farbe erhält.
  - c) Es gilt wieder  $\chi(P_n) \geq 2$ . Der Graph lässt sich färben, indem die Farben abwechselnd vergeben werden.
  - d) Erneut gilt  $\chi(C_n) \geq 2$ . Für gerade  $n$  lässt sich der Graph färben, indem die Farben abwechselnd vergeben werden. Wir erhalten aus  $\Delta(C_n) = 2$ , dass  $\chi(C_n) \leq 3$ . Für ungerade  $n$  gilt  $\chi(C_n) = 3$ , denn: Sei  $C_n = [v_1, \dots, v_n, v_1]$ . Dann müssen wir abwechselnd Farben bis  $v_{n-1}$  vergeben, wodurch  $v_{n-1}$  und  $v_1$  unterschiedlich gefärbt sind.  $v_n$  muss also eine dritte Farbe erhalten.
  
2. Alle  $G_{1,n}$  bzw.  $G_{m,1}$  lassen sich planar zeichnen, z.B.  $G_{2,1}$ :



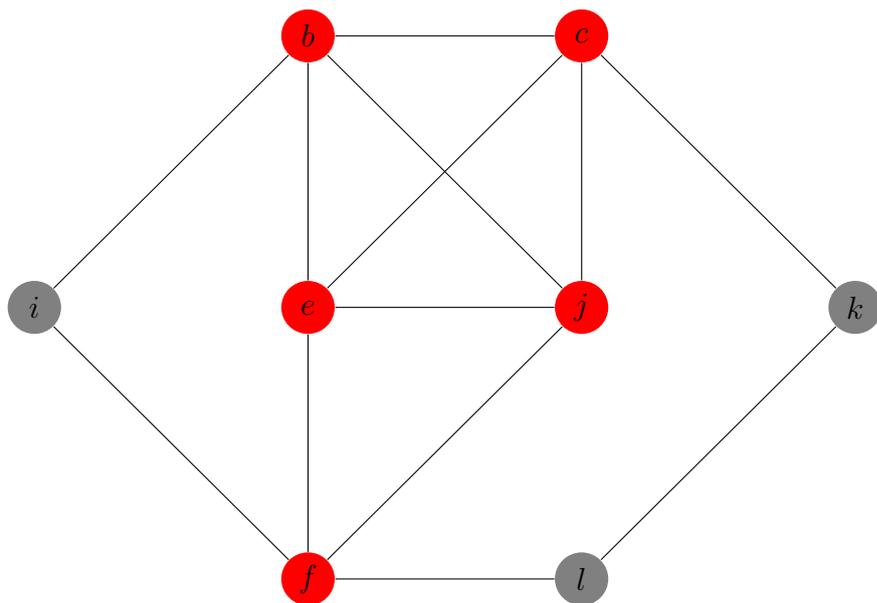
$G_{2,2}$  lässt sich planar zeichnen:



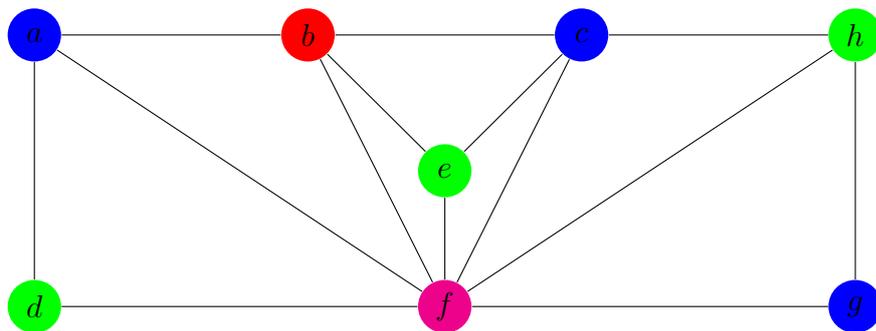
Der abgebildete Graph,  $G_{3,2}$ , ist hingegen nicht planar, da er eine Unterteilung des  $K_{3,3}$  enthält. Wir bilden zunächst den Teilgraph  $G_{3,2} \setminus \{a, h, d, g\}$ . Danach entfernen wir die Kanten  $\{i, e\}$ ,  $\{k, j\}$ ,  $\{b, j\}$ ,  $\{e, c\}$ ,  $\{e, f\}$  und  $\{j, l\}$  und erhalten erneut einen Teilgraph:



Dies ist eine Unterteilung des  $K_{3,3}$ , den man durch Entfernen von  $i$  und  $k$  und Einfügen der Kanten  $\{b, f\}$  und  $\{c, l\}$  erhält.  $\{b, j, l\}$  und  $\{c, e, f\}$  sind hierbei die beiden Partitionen. Alternativ kann auch eine Unterteilung des  $K_5$  angegeben werden:



3.  $G$  enthält mindestens 2 Blätter (wenn  $G = P_6$ ) und höchstens 5 Blätter (wenn  $G = K_{1,5}$ ).
4.  $G[b, c, e, f]$  ist isomorph zu  $K_4$ , also ist  $\chi(G) \geq 4$ . Mit folgender 4-Färbung folgt insgesamt auch  $\chi(G) = 4$ :



5. Zwischen zwei Farbklassen muss es mindestens eine Kante geben, also  $m \geq \sum_{i=1}^{\chi(G)-1} i = \frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2}$ . Durch Umstellen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \chi(G)(\chi(G) - 1) &\leq 2m \\
 \Leftrightarrow \chi(G)^2 - \chi(G) &\leq 2m \\
 \Leftrightarrow \chi(G)^2 - \chi(G) + \frac{1}{4} &\leq 2m + \frac{1}{4} \\
 \Leftrightarrow \left(\chi(G) - \frac{1}{2}\right)^2 &\leq 2m + \frac{1}{4} \\
 \Rightarrow \chi(G) - \frac{1}{2} &\leq \sqrt{2m + \frac{1}{4}} \\
 \Leftrightarrow \chi(G) &\leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

6. Idee: Es kommt nur darauf an, wie viele Möglichkeiten es gibt,  $r$  Knoten auszuwählen, da alle Knoten miteinander verbunden sind. Hierbei

ist die Reihenfolge egal, da wir alle Kreise mit derselben Knotenmenge identifizieren. Wir erhalten also  $\binom{n}{r}$  verschiedene echte Kreise der Länge  $r$ , falls  $r \leq n$ , ansonsten 0.

7. Da ein Baum zusammenhängend ist, gilt  $d_G(v) \geq 1$  wegen  $|V| \geq 2$ . Induktion über  $|V|$ :

$$|V| = 2: \sum_{v \in V} d_G(v) = 2 = 2(|V| - 1)$$

$|V| \rightarrow |V| + 1$ : Sei  $G' = (V', E')$  mit  $V = V' \uplus \{x\}$  und  $E' \subseteq E$ . Wir müssen zeigen, dass es genau ein  $x' \in V'$  gibt mit  $\{x, x'\} \in E$ . Wäre  $E = E'$ , so wäre  $G$  nicht zusammenhängend. Gäbe es zwei neue Kanten  $E = E' \uplus \{\{x', x\}, \{x'', x\}\}$ , so wäre  $G$  kein Baum, da es einen Pfad von  $[x', \dots, x'']$  in  $G'$  gibt, da  $G'$  zusammenhängend ist, und wir einen Kreis  $[x, x', \dots, x'', x]$  erhalten. Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} d_G(v) &= 2 + \sum_{v \in V'} d'_G(v) \\ &= 2(|V'| - 1) = 2 + 2(|V| - 1 - 1) = 2(|V| - 1) \end{aligned}$$

Die Rückrichtung der Aussage gilt nicht, denn die Gleichung gilt z.B. auch für den Graph, der aus einem Dreieck und einem einzelnen Knoten besteht: Sei  $C_3 = (V, E)$ . Dann ist  $G = (V', E)$  mit  $V' = V \cup \{4\}$  ein Graph mit  $2(|V'| - 1) = 2(4 - 1) = 6$  und  $\sum_{v \in V'} d_G(v) = 6$ .