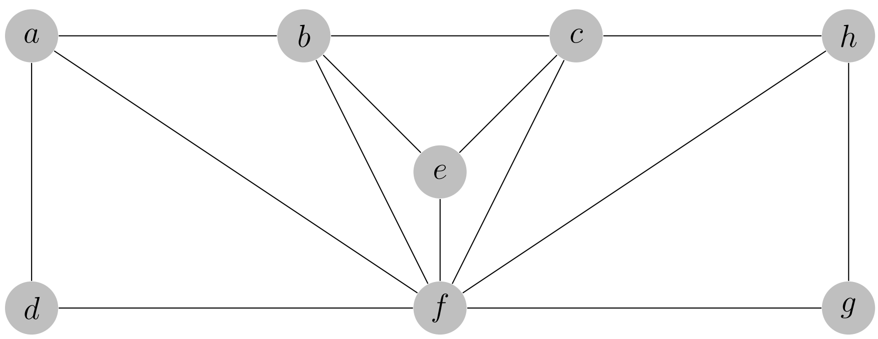
Carl Philipp Reh
Daniel König

Diskrete Mathematik für Informatiker

WS 2016/2017

Übung 7

1. Gegeben sei folgender Graph und das Matching $M = \{\{h, f\}, \{c, e\}, \{a, d\}\}$:



   a) Ist M maximal/perfekt?

   b) Finden Sie einen erweiternden Weg, der die Kanten $\{h, f\}$ und $\{c, e\}$ enthält?

   c) Geben Sie ggf. das aus dem resultierenden Weg entstehende Matching an. Ist dieses Matching maximal/perfekt?

2. Bestimmen Sie die Anzahl der perfekten Matchings im bipartiten Graphen $K_{n,n}$ und im vollständigen Graphen K_{2n}.

3. Zeichnen Sie den Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
   $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$.

   a) Enthält G einen Eulerweg / Eulerkreis?

   b) Sei $G' = (V \cup \{6\}, E \cup \{\{1, 6\}, \{2, 6\}\})$. Enthält G' einen Eulerweg / Eulerkreis?

c) Sei $G'' = (V \cup \{6,7\}, E \cup \{\{1,6\},\{2,6\},\{3,7\},\{4,7\}\})$. Enthält G'' einen Eulerweg / Eulerkreis?

4. Bestimmen Sie ein Kriterium dafür, dass ein Graph $G = (V, E)$ einen Eulerweg, aber keinen Eulerkreis hat.

5. Sei G ein Graph mit n Knoten.

   a) Was ist die kleinste Anzahl an Kanten m, die man braucht, so dass G zusammenhängend ist?

   b) Wie viele Kanten muss G mindestens haben, so dass G in jedem Fall zusammenhängend ist?

6. a) Beweisen Sie: K_n besitzt für $n \geq 3$ einen Hamiltonkreis.

   b) Sei G ein Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Wie viele Kanten muss G mindestens enthalten, damit G auf jeden Fall einen Hamiltonkreis besitzt?

7. Das Komplement eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit $\{u, v\} \in \overline{E}$ genau dann, wenn $\{u, v\} \notin E$. Ein Graph G heißt selbstkomplementär, wenn G isomorph zu $\overline{G}$ ist. Beweisen Sie, dass in jedem selbstkomplementären Graphen mit n Knoten gilt: $n \equiv 0 \mod 4$ oder $n \equiv 1 \mod 4$.